

Návody k domácí části I. kola kategorie B

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}|x - 5| + |y - 9| &= 6, \\ |x^2 - 9| + |y^2 - 5| &= 52.\end{aligned}$$

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Řešte rovnici $|4x - 2| + |x - 2| = 6$. [Rovnice má dvě řešení $-\frac{2}{5}$ a 2.]
2. Nechť pro reálná čísla x a y platí $|x^2 + 4| + |y^2 - 65| = 20$, potom $x \in \langle -4; 4 \rangle$ a $y \in \langle -9; -7 \rangle \cup \langle 7; 9 \rangle$. Dokažte.
3. V oboru reálných čísel řešte rovnici $2^{|x+1|} - 2^x = 1 + |2^x - 1|$. [63-B-S-1]
- D1. Určete všechna reálná čísla p , pro něž má rovnice $(x - 1)^2 = 3|x| - px$ právě tři různá řešení v oboru reálných čísel. [52-B-II-3]
- D2. Určete všechna reálná čísla s a t , pro která je grafem funkce

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + s}{t|x - 1| + x + 7}$$

lomená čára složená ze dvou polopřímek. [50-A-II-2]

- D3. Pro která reálná čísla a, b je funkce $f(x) = a|x - 1| + b(x - 3) + |x - b| + x - 1$ omezená? [49-B-S-1]

2. Drak má n hlav, po jedné na každém z n krků uspořádaných do kruhu. Rytíř dokáže jedním úderem tít po k sousedních krcích a hlavy na nich setnout. Jestliže drakovi po úderu zbyde aspoň jedna hlava, může si nechat některou z chybějících hlav okamžitě dorůst. Dokažte, že když pro daná čísla n a k může rytíř draka zbavit všech hlav bez ohledu na to, jak mu dorůstají, svede to udělat nejvýše třemi údery.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Uvažujme situaci ze zadání úlohy 2. Nechť rytíř dokáže jedním úderem tít po 2 sousedních krcích.
 - a) Pokud má drak 3 hlavy, potom je rytíř schopen zbavit draka všech hlav dvěma údery. Popište rytířovu strategii.
 - b) Dokažte, že pokud má drak 4 hlavy, potom si drak může nechat dorůst hlavy tak, že ho rytíř nikdy nezabaví všech hlav. Popište drakovu strategii. [Označme hlavy draka dokola čísla 1, 2, ... a) Nechť rytíř prvním úderem setne hlavy 2 a 3. Drakovi zbývá hlava 1, proto si některou z useknutých hlav nechá dorůst. Ale každá z useknutých hlav sousedí s hlavou 1, a jakmile doroste, rytíř ji usekne spolu s hlavou 1 druhým úderem. b) Rytíř nemůže jedním úderem tít po krcích, na kterých jsou hlavy 2 a 4, současně však jedním úderem musí jednu z těchto dvou hlav setnout. Po každém úderu tedy drakovi zbyde buď hlava 2, nebo hlava 4 a drak si následně nechá druhou z těchto hlav dorůst.]
- D1. Na každé stěně krychle je napsáno právě jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme libovolné dvě sousední stěny krychle a čísla na nich napsaná zvětšíme o 1. Určete nutnou a postačující podmínku pro očíslování stěn krychle na počátku, aby po konečném počtu vhodných kroků byla na všech stěnách krychle stejná čísla. [60-A-I-5]

3. V trojúhelníku ABC označme U střed strany AB a V střed strany AC . V polorovině opačné k polorovině BCA uvažujme libovolný rovnoběžník $BCDE$. Označme X průsečík přímek UD a VE . Dokažte, že přímka AX dělí rovnoběžník $BCDE$ na dvě části téhož obsahu.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Dokažte, že přímka dělí rovnoběžník na dvě části stejného obsahu, právě když prochází jeho průsečíkem úhlopříček (*středem rovnoběžníku*). [Rovnoběžník je středově souměrný, přímka procházející jeho středem ho tedy dělí na dvě shodné části. Naopak, nechť daná přímka dělí rovnoběžník na dvě části stejného obsahu. V případě, že prochází dvěma sousedními stranami, vytne trojúhelník, jehož obsah je nejvýše polovina obsahu čtyřúhelníku, rovnost nastane v případě úhlopříčky. Pokud přímka prochází protějšími stranami, vzniknou dva lichoběžníky se stejnou výškou, ty mají shodný obsah, právě když mají shodný součet základů.]
 2. Zopakujte si základní vlastnosti těžnic a těžiště trojúhelníku.
- D1. Lichoběžník $ABCD$ má základny AB a CD po řadě délek 18 cm a 6 cm. Pro bod E strany AB platí $2|AE| = |EB|$. Těžiště trojúhelníků ADE , CDE , BCE , jež označíme po řadě K , L , M , tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku.
- a) Dokažte, že přímky KM a CM svírají pravý úhel.
 - b) Vypočítejte délky ramen lichoběžníku $ABCD$.
- [60–C–II–3]
- D2. Uvnitř rovnoběžníku $ABCD$ je dán bod X . Sestrojte přímku, která prochází bodem X a rozděluje daný rovnoběžník na dvě části, jejichž obsahy se navzájem liší co nejvíce. [61–A–III–4]

4. Nechť m je přirozené číslo, které má 7 kladných dělitelů, a n je přirozené číslo, které má 9 kladných dělitelů. Kolik dělitelů může mít součin $m \cdot n$?

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Kolik kladných dělitelů mají čísla 24, 128 a 105? Kolik kladných dělitelů má součin každé dvojice těchto čísel? [Každé z čísel má 8 dělitelů, $24 \cdot 128$ má 22 dělitelů, $24 \cdot 105$ má 48 dělitelů, $128 \cdot 105$ má 64 dělitelů.]
 2. Jaké jsou všechny možné rozklady čísla s 8 kladnými děliteli na součin prvočísel? [p_1^7 , $p_1^3 p_2$, $p_1 p_2 p_3$.]
 3. Určete nejmenší přirozené číslo s osmi kladnými děliteli. [Z výsledku předchozí úlohy plyne, že hledaným je číslo 24, nejmenší z čísel 2^7 , $2^3 \cdot 3$ a $2 \cdot 3 \cdot 5$.]
 4. Nechť $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$ je rozklad přirozeného čísla n na součin prvočísel. Dokažte, že potom má číslo n právě $\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_s + 1)$ kladných dělitelů.
- D1. Označme $\tau(k)$ počet všech kladných dělitelů přirozeného čísla k a nechť n je řešením rovnice $\tau(1,6n) = 1,6\tau(n)$. Určete hodnotu podílu $\tau(0,16n) : \tau(n)$. [48–A–I–4]

5. Nechť S je střed přepony AB pravouhlého trojúhelníku ABC , který není rovno-ramenný. Označme D patu výšky z vrcholu C a R průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přeponou AB . Určete velikosti vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku, platí-li $|SR| = 2|DR|$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Osa vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu C protíná stranu AB v bodě R . Dokažte rovnost poměrů $|AC| : |BC| = |AR| : |BR|$. [Označme v velikost výšky trojúhelníku ABC procházející bodem C . Bod R leží na ose úhlu ACB , jeho vzdálenost od stran AC a BC je tedy stejná, označme ji r . Dvěma způsoby vyjádříme obsah trojúhelníku ARC , platí $\frac{1}{2}|AR|v = \frac{1}{2}|AC|r$. Podobně vyjádříme i obsah trojúhelníku BRC , platí $\frac{1}{2}|BR|v = \frac{1}{2}|BC|r$. Vydělením obou těchto rovností dostaneme požadovaný vztah.]
2. Pomocí velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku vyjádřete velikosti úhlů, které svírají výšky trojúhelníku s jednotlivými stranami a mezi sebou navzájem.
3. Je dána kružnice k se středem S . Kružnice l má větší poloměr než kružnice k , prochází jejím středem a protíná ji v bodech M a N . Přímka, která prochází bodem N a je rovnoběžná s přímkou MS , vytíná na kružnicích tětivy NP a NQ . Dokažte, že trojúhelník MPQ je rovnoramenný. [59–C–II–3]
4. Pro vnitřní bod P strany AB ostroúhlého trojúhelníku ABC označme K a L paty kolmic z bodu P na přímky AC a BC . Sestrojte takový bod P , pro který přímka CP půlí úsečku KL . [58–B–S–2]
5. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Označme K a L paty výšek z vrcholů A a B , M střed strany AB a V průsečík výšek trojúhelníku ABC . Dokažte, že osa úhlu KML prochází středem úsečky VC . [54–B–II–3]
- D1. Nechť V je průsečík výšek ostroúhlého trojúhelníku ABC . Přímka CV je společnou tečnou kružnic k a l , které se vně dotýkají v bodě V a přitom každá z nich prochází jedním z vrcholů A a B . Jejich průsečíky s vnitřky stran AC a BC označme P a Q . Dokažte, že polopřímka VC je osou úhlu PVQ a že body A, B, P, Q leží na jedné kružnici. [62–B–I–3]
- D2. V rovině je dán rovnoběžník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD je kolmá ke straně AD . Označme M ($M \neq A$) průsečík přímky AC s kružnicí o průměru AD . Dokažte, že osa úsečky BM prochází středem strany CD . [57–B–II–3]
- D3. V libovolném ostroúhlém různostranném trojúhelníku ABC označme O, V a S po řadě střed kružnice opsané, průsečík výšek a střed kružnice vepsané. Dokažte, že osa úsečky OV prochází bodem S , právě když jeden vnitřní úhel trojúhelníku ABC má velikost 60° . [59–A–I–4]
- D4. Označme S střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC a P, Q paty kolmic z vrcholu C k přímkám, na kterých leží osy vnitřních úhlů BAC a ABC . Dokažte, že přímky AB a PQ jsou rovnoběžné. [51–A–S–2]

6. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{1}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{c^2 - ca + a^2} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Určete, kdy nastane rovnost.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Dokažte nerovnost $a^2 - ab + b^2 > 0$ pro libovolná dvě reálná čísla a, b . [Nerovnost dostaneme jednoduchou úpravou na čtverec, nebo ukážeme že uvedený kvadratický trojčlen má v proměnné a záporný diskriminant.]

2. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí nerovnosti

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \quad a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2, \quad \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Kdy v nich nastane rovnost?

3. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí nerovnost

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

[Podle předcházející úlohy platí $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$. Podobně platí i $\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ a $\frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right)$. Sečtením těchto tří nerovností dostaneme požadovanou nerovnost, ve které nastane rovnost, právě když nastane rovnost ve všech užitých nerovnostech, tj. v případě $a = b = c$.]

4. Určete všechny dvojice $(x; y)$ reálných čísel, které vyhovují nerovnici

$$(x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^2.$$

[63-B-I-2]

5. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leq \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a+b)} \leq \frac{a+b}{2},$$

a pro každou z obou nerovností zjistěte, kdy přechází v rovnost. [59-C-I-5]

6. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí nerovnost

$$\left(a + \frac{1}{b} \right) \left(b + \frac{1}{c} \right) \left(c + \frac{1}{a} \right) \geq 8.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost. [55-B-S-1]

- D1. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b platí nerovnost

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq \sqrt[3]{2(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}.$$

[49-A-II-3]

- D2. Dokažte, že pro každou trojici x, y, z kladných čísel platí nerovnost

$$\sqrt{xyz} \left(\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \right) \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost. [47-B-I-3]

- D3. Dokažte, že pro každou trojici x, y, z nezáporných čísel platí nerovnost

$$x(x - \sqrt{yz}) + y(y - \sqrt{zx}) + z(z - \sqrt{xy}) \geq 0.$$

Zjistěte, kdy platí rovnost. [17-A-II-2]