

Návody k domácí části I. kola kategorie C

1. Určete všechny dvojice (x, y) reálných čísel, která vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+4)^2} &= 4-y, \\ \sqrt{(y-4)^2} &= x+8.\end{aligned}$$

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. V oboru reálných čísel řešte rovnici:
 - a) $|x| = x + 2$ [$x = -1$]
 - b) $|2x + 2| = x + 4$ [$x = -2, x = 2$]
 - c) $|x - 1| = |x| - 1$ [$x \geq 1$]
 2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:
 - a) $|x + 2| = y - 1, |y - 5| = -x$ [$x = -3, y = 2$]
 - b) $|x - 1| = y, |x - 2| = y + 2$ [soustava nemá řešení]
 - c) $|x| = y + 1, x = |y| + 1$ [$x \geq 1, y = x - 1$]
2. Petr má zvláštní hodinky se třemi ručičkami – první z nich oběhne kruhový ciferník za minutu, druhá za 3 minuty a třetí za 15 minut. Na začátku jsou všechny ručičky ve stejné poloze. Určete, za jak dlouho budou ručičky rozdělovat ciferník na tři shodné části. Najděte všechna řešení.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Jaký úhel spolu svírají hodinová a minutová ručička v 1:30 na ciferníku
 - a) s 12 čísly, [135°]
 - b) s 24 čísly? [$157,5^\circ$]
 2. Na ciferníku s 12 čísly najděte všechny časy, kdy budou hodinová a minutová ručička svírat úhel 120° v intervalu
 - a) 0–12 hodin, [$\frac{4}{11}$ h, $2 \cdot \frac{4}{11}$ h, $4 \cdot \frac{4}{11}$ h, $5 \cdot \frac{4}{11}$ h, $7 \cdot \frac{4}{11}$ h, $8 \cdot \frac{4}{11}$ h, $10 \cdot \frac{4}{11}$ h, $11 \cdot \frac{4}{11}$ h, $13 \cdot \frac{4}{11}$ h, $14 \cdot \frac{4}{11}$ h, $16 \cdot \frac{4}{11}$ h, $17 \cdot \frac{4}{11}$ h, $19 \cdot \frac{4}{11}$ h, $20 \cdot \frac{4}{11}$ h, $22 \cdot \frac{4}{11}$ h, $23 \cdot \frac{4}{11}$ h, $25 \cdot \frac{4}{11}$ h, $26 \cdot \frac{4}{11}$ h, $28 \cdot \frac{4}{11}$ h, $29 \cdot \frac{4}{11}$ h, $31 \cdot \frac{4}{11}$ h, $32 \cdot \frac{4}{11}$ h]
 - b) 0– ∞ hodin. [$(3n + 1) \cdot \frac{4}{11}$ h, $(3n + 2) \cdot \frac{4}{11}$ h, $n = 0, 1, 2, \dots$]
3. Simona a Lenka hrají hru. Pro dané celé číslo k takové, že $0 \leq k \leq 64$, vybere Simona k políček šachovnice 8×8 a každé z nich označí křížkem. Lenka pak šachovnici nějakým způsobem vyplní dvaatřiceti dominovými kostkami. Je-li počet kostek pokrývajících dva křížky lichý, vyhrává Lenka, jinak vyhrává Simona. V závislosti na k určete, která z dívek má vyhrávající strategii.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Řešte danou úlohu pro šachovnice 2×2 a 4×4 .
2. Jak se změní výsledek dané úlohy, budeme-li místo dvou křížků pod kostkou uvažovat podmínku, že pod kostkou není ani jeden křížek?

3. Simona a Lenka hrají hru. Pro dané celé číslo k takové, že $0 \leq k \leq 9$, vybere Simona k políček šachovnice 3×3 a na každé z nich napíše číslo 1, na ostatní políčka napíše číslo 0. Lenka pak šachovnici nějakým způsobem pokryje třemi triminovými kostkami, tj. kostkami tvaru 3×1 , a čísla pod jejími políčky vynásobí. Je-li počet kostek se součinem 0 lichý, vyhrává Simona, jinak vyhrává Lenka. V závislosti na k určete, kolikaprocentní vítěznou strategii má Simona. [80%]
4. Označme E střed základny AB lichoběžníku $ABCD$, v němž platí $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Úhlopříčka AC protíná úsečky ED , BD po řadě v bodech F , G . Určete postupný poměr

$$|AF| : |FG| : |GC|.$$

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- Lichoběžník $ABCD$ má základny o délkách $|AB| = a$, $|CD| = c$, jeho úhlopříčky se protínají v bodě U .
 - Dokažte, že trojúhelníky ABU a CDU jsou podobné a určete poměr podobnosti. Jaký je poměr obsahů těchto trojúhelníků? [$a^2 : c^2$]
 - Dokažte, že obsahy trojúhelníků ADU a BCU jsou stejné.
 - Je $a : b = 1 : 2$, $b : c = 3 : 4$, $c : d = 5 : 6$. Určete $a : b : c : d$. [15 : 30 : 40 : 48]
5. Rozdíl dvou přirozených čísel je 2010 a jejich největší společný dělitel je 2014krát menší než jejich nejmenší společný násobek. Určete všechny takové dvojice čísel.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- Najděte všechny dělitele čísla 2014. [1, 2, 19, 38, 53, 106, 1 007, 2 014]
 - Rozdíl dvou přirozených čísel je 5 a jejich největší společný dělitel je 6krát menší než jejich nejmenší společný násobek. Určete obě takové dvojice čísel.
 - Dokažte, že pro každá dvě přirozená čísla a , b a jejich největšího společného dělitele D a jejich nejmenší společný násobek n platí $ab = nD$.
 - Platí pro každá tři přirozená čísla a , b , c a jejich největšího společného dělitele D a jejich nejmenší společný násobek n rovnost $abc = nD$?
 - Mají-li přirozená čísla a , b největšího společného dělitele D , mají stejného největšího společného dělitele i čísla a , b , $a - b$, $a + b$. Dokažte. Platí stejné tvrzení pro nejmenší společný násobek?
6. Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že v zápise čísla $\sqrt{n}$ následují bezprostředně za desetinnou čárkou dvě devítky.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- Není-li přirozené číslo n druhou mocninou jiného přirozeného čísla, dokažte, že $\sqrt{n}$ je číslo iracionální.
- Najděte pomocí kalkulačky nejmenší přirozené číslo n takové, že v zápise iracionálního čísla $\sqrt{n}$ následuje bezprostředně za desetinnou čárkou devítka. [$\sqrt{35} = 5,916\,079\dots$]
- Najděte všechna přirozená čísla n taková, že v zápise iracionálního čísla $\sqrt{n}$ následuje bezprostředně za desetinnou čárkou devítka.
- Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že v zápise iracionálního čísla $\sqrt{n}$ následují bezprostředně za desetinnou čárkou dvě nuly. [$\sqrt{2\,501} = 50,009\,999\dots$]

5. Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že v zápise iracionálního čísla $\sqrt{n}$ následují bezprostředně za desetinnou čárkou dvě stejné cifry. [na kalkulačce $\sqrt{43} = 6,557\,438\dots$]