

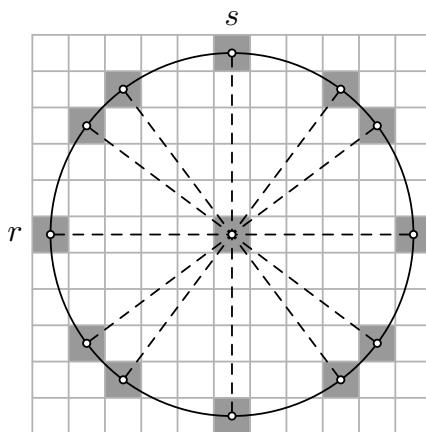
Úlohy domácí části I. kola kategorie A

1. Je dáno přirozené číslo n . Čtverec o straně délky n je rozdělen na n^2 jednotkových čtverečků. Za vzdálenost dvou čtverečků považujeme vzdálenost jejich středů. Určete počet dvojic čtverečků, jejichž vzdálenost je 5.

ŘEŠENÍ. Polohu jednotkových čtverečků budeme v řešení vyjadřovat souřadnicemi — čtvereček v r -tém řádku a s -tém sloupci označíme (r, s) . Pomocí Pythagorovy věty snadno nahlédneme (obr. 1), že čtvereček (r, s) má vzdálenost 5 právě od čtverečků

$$\begin{aligned} (r, s+5), (r+5, s), (r+3, s+4), (r+4, s+3), (r+3, s-4), (r+4, s-3), \\ (r, s-5), (r-5, s), (r-3, s-4), (r-4, s-3), (r-3, s+4), (r-4, s+3). \end{aligned} \quad (1)$$

Celkem tak máme nejvýše 12 možností; méně jich je v případě, kdy některé ze souřadnic odpovídají poloze mimo čtverec $n \times n$, tj. když neleží v množině $\{1, 2, \dots, n\}$.



Obr. 1

Spočítejme nejdříve, kolik existuje dvojic čtverečků typu $\{(r, s), (r, s+5)\}$, tedy „vodorovných“ dvojic. Pokud $n \geq 5$, je jich v každém z n řádků $n-5$, protože pro pevné r může s nabývat hodnot $1, 2, \dots, n-5$. Dohromady je „vodorovných“ dvojic $n(n-5)$. Vzhledem k souměrnosti je stejně i „svislých“ dvojic.

Dvojic čtverečků typu $\{(r, s), (r+3, s+4)\}$ je celkem $(n-4)(n-3)$ (pokud $n \geq 4$), protože r může nabývat hodnot $1, 2, \dots, n-3$ a s hodnot $1, 2, \dots, n-4$. Ze souměrnosti dostáváme, že i dvojic čtverečků typu $\{(r, s), (r+4, s+3)\}$, $\{(r, s), (r+3, s-4)\}$ a $\{(r, s), (r+4, s-3)\}$ je stejný počet.

Jelikož se zajímáme o počet neuspořádaných dvojic čtverečků, ostatní možnosti z (1) již započítávat nebudeme (jinak bychom každou dvojici započítali dvakrát). Celkem je tedy hledaný počet dvojic čtverečků v případě $n \geq 5$ roven

$$2n(n-5) + 4(n-4)(n-3) = 2(3n^2 - 19n + 24).$$

Pro $n \leq 4$ je hledaný počet zřejmě rovný 0.

Poznámka. Úlohu lze řešit i následovně: Do každého čtverečku velkého čtverce vepíšeme číslo udávající počet čtverečků, které od něj mají vzdálenost 5. Pro výsledek stačí sečíst všechna vepsaná čísla a součet vydělit dvěma (každá dvojice čtverečků je v součtu započítána dvakrát). Přitom pokud je čtvereček od okrajových čtverečků čtverce vzdálen alespoň 5 (jeho souřadnice (r, s) tedy splňují nerovnosti $6 \leq r, s \leq n - 5$), je v něm napsáno číslo 12. Stačí tedy vyšetřit čísla blízko okrajů čtverce, a zvláště blízko jeho

4	4	4	5	6	7	7		7	7	6	5	4	4	4
4	4	4	5	6	7	7		7	7	6	5	4	4	4
4	4	4	5	6	7	7		7	7	6	5	4	4	4
5	5	5	6	8	9	9		9	9	8	6	5	5	5
6	6	6	8	10	11	11		11	11	10	8	6	6	6
7	7	7	9	11	12	12		12	12	11	9	7	7	7
7	7	7	9	11	12	12		12	12	11	9	7	7	7
7	7	7	9	11	12	12		12	12	11	9	7	7	7
7	7	7	9	11	12	12		12	12	11	9	7	7	7
6	6	6	8	10	11	11		11	11	10	8	6	6	6
5	5	5	6	8	9	9		9	9	8	6	5	5	5
4	4	4	5	6	7	7		7	7	6	5	4	4	4
4	4	4	5	6	7	7		7	7	6	5	4	4	4
4	4	4	5	6	7	7		7	7	6	5	4	4	4

Obr. 2

rohů. Nevýhodou tohoto přístupu je, že je nutné zvláště vyšetřit situace pro $n \leq 9$, kdy okrajové oblasti mají menší rozměr než v obecném případě $n \geq 10$, pro který je situace znázorněna na obr. 2. Pro $n \geq 10$ je výsledný počet dvojic roven

$$\frac{1}{2} (12(n-10)^2 + 4(n-10)(11+9+3 \cdot 7) + 4(10+2 \cdot 8+7 \cdot 6+6 \cdot 5+9 \cdot 4))$$

a podobné vyjádření (už bez proměnné n) vyplývající z obr. 3a až 3e lze napsat pro jednotlivé případy $n \in \{9, 8, 7, 6, 5\}$. Dá se ověřit (a vyplývá to z předchozího řešení), že všechna tato vyjádření se dají reprezentovat jedním vzorcem $2(3n^2 - 19n + 24)$.

2	1	0	1	2
1	0	0	0	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	1	0	1	2

Obr. 3a

4	3	2	2	3	4
3	2	1	1	2	3
2	1	0	0	1	2
2	1	0	0	1	2
3	2	1	1	2	3
4	3	2	2	3	4

Obr. 3b

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Kolik je ve čtverci $n \times n$ dvojic čtverečků, jejichž vzdálenost je 2? [Pokud $n \geq 2$, je jich v každém řádku $n-2$ a stejně i v každém sloupci. Celkem jich je $2n(n-2)$.]
N2. Kolik je ve čtverci $n \times n$ dvojic čtverečků, jejichž vzdálenost je $\sqrt{5}$? [Pro $n \geq 2$ jich je $4(n-1)(n-2)$.]

4	4	3	3	3	4	4
4	4	3	3	3	4	4
3	3	2	2	2	3	3
3	3	2	0	2	3	3
3	3	2	2	2	3	3
4	4	3	3	3	4	4
4	4	3	3	3	4	4

Obr. 3c

4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4

Obr. 3d

4	4	4	5	5	5	4	4	4
4	4	4	5	5	5	4	4	4
4	4	4	5	5	5	4	4	4
5	5	5	6	7	6	5	5	5
5	5	5	7	8	7	5	5	5
5	5	5	6	7	6	5	5	5
4	4	4	5	5	5	4	4	4
4	4	4	5	5	5	4	4	4
4	4	4	5	5	5	4	4	4

Obr. 3e

- D1. Určete počet dvojic (a, b) přirozených čísel ($1 \leq a < b \leq 86$), pro které je součin ab dělitelný třemi. [51–C–II–1]
- D2. Čtvercová tabulka je rozdělena na 16×16 políček. Kobylka se po ní pohybuje dvěma směry: vpravo nebo dolů, přičemž střídá skoky o dvě a o tři políčka (tj. žádné dva po sobě jdoucí skoky nejsou stejně dlouhé). Začíná skokem délky dva z levého horního políčka. Kolika různými cestami se může kobylka dostat na pravé dolní políčko? (Pod cestou máme na mysli posloupnost políček, na které kobylka doskočí.) [62–C–I–1]

2. Je dán trojúhelník ABC , v němž je BC nejkratší stranou. Její střed označme M . Na stranách AB a AC určíme postupně body X a Y tak, aby platilo $|BX| = |BC| = |CY|$. Průsečík přímk CX a BY označme Z . Ukažte, že přímka ZM prochází středem kružnice připsané straně BC daného trojúhelníku.

ŘEŠENÍ. Označme S střed kružnice připsané straně BC . Bod S leží na osách vnějších úhlů při vrcholech B a C daného trojúhelníku. Pokud tedy velikosti úhlů v trojúhelníku ABC označíme obvyklým způsobem, platí

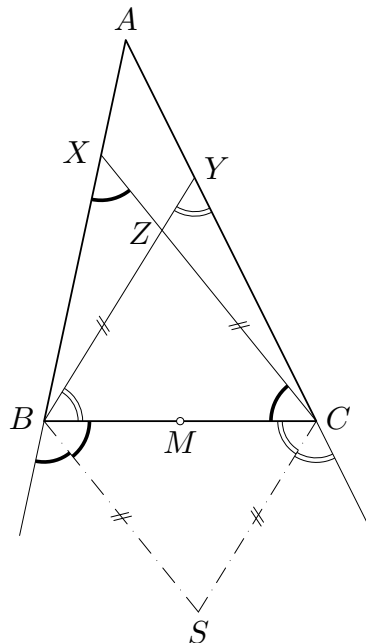
$$|\sphericalangle CBS| = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta).$$

Podle zadání je trojúhelník CXB rovnoramenný se základnou CX . Jelikož při jeho hlavním vrcholu B má vnitřní úhel velikost β , pro velikost úhlu při základně platí rovnost

$$2|\sphericalangle BCX| + \beta = 180^\circ, \quad \text{odkud} \quad |\sphericalangle BCX| = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta).$$

Je tedy $|\sphericalangle CBS| = |\sphericalangle BCX|$, z čehož s ohledem na vlastnosti střídavých úhlů vyplývá, že přímky BS a XC jsou rovnoběžné (obr. 4).

Zřejmě analogickým postupem lze odvodit rovnoběžnost přímk CS a YB , takže čtyřúhelník $BSCZ$ je rovnoběžník. Protože bod M je středem jeho úhlopříčky BC , musí být středem i jeho druhé úhlopříčky SZ , body Z, M, S leží tudíž v přímce, což jsme měli dokázat.



Obr. 4

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Označme S, T, U postupně středy kružnic připsaných stranám BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC . Dokažte, že trojúhelníky SBC, ATC, ABU jsou podobné. [Trojúhelníky jsou podobné podle věty uu ; velikosti jejich vnitřních úhlů jsou $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha, 90^\circ - \frac{1}{2}\beta, 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$.]

- N2. V daném čtyřúhelníku $ABCD$ označme postupně K, L, M, N středy stran AB, BC, CD, DA . Dokažte, že střed úsečky KM leží na přímce LN . [Úsečky KL a NM jsou střední příčky trojúhelníků ACB a ACD , jsou tedy rovnoběžné s AC , tudíž i navzájem. Podobně $LM \parallel KN$. Takže $KLMN$ je rovnoběžník a středy úseček KM, LN jsou totožné.]
- D1. V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ platí $|BC| = |CD| = |DA|$ a $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| = 36^\circ$. Na základně AB je dán bod K tak, že $|AK| = |AD|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AKD a KBC mají vnější dotyk. [53–B–I–2]
- D2. Je dána kružnice k se středem S . Kružnice l má větší poloměr než kružnice k , prochází jejím středem a protíná ji v bodech M a N . Přímka, která prochází bodem N a je rovnoběžná s přímkou MS , vytíná na kružnicích tětivy NP a NQ . Dokažte, že trojúhelník MPQ je rovnoramenný. [59–C–II–3]

3. Najděte všechna celá čísla $k \geq 2$, pro která existuje k -prvková množina M celých kladných čísel taková, že součin všech čísel z M je dělitelný součtem libovolných dvou (různých) čísel z M .

ŘEŠENÍ. Ukážeme, že vyhovuje každé $k \geq 2$. Snažíme se tedy sestavit k -prvkovou množinu přirozených čísel $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ takovou, že pro libovolné indexy i, j splňující $1 \leq i < j \leq k$ platí $n_i + n_j \mid n_1 n_2 \dots n_k$. Konstrukci takové množiny založíme na postupu, při kterém začneme s libovolnou k -prvkovou množinou a pokusíme se ji změnit na vyhovující.

Uvažujme nejprve jednoduchý případ $k = 2$ a začneme s množinou $\{1, 2\}$. Součin jejích prvků je roven 2, zatímco jediný možný součet jejích dvou různých prvků je $1 + 2 = 3 \nmid 2$, množina tedy nevyhovuje. Pokud však každý její prvek vynásobíme číslem 3 (tedy číslem, které „způsobilo“, že množina nevyhovuje), dostaneme vyhovující množinu $\{3, 6\}$, protože $3 + 6 = 9 \mid 3 \cdot 6$.

Podobně pokud v případě $k = 3$ začneme s množinou $\{1, 2, 3\}$ se součinem prvků 6, obdržíme „nevyhovující“ součty $1 + 3 = 4 \nmid 6$, $2 + 3 = 5 \nmid 6$. Vynásobíme-li všechny prvky této množiny číslem $4 \cdot 5 = 20$, dostaneme vyhovující množinu $\{20, 40, 60\}$.¹ Množina by samozřejmě vyhovovala i v případě, že bychom čísla vynásobili nějakým větším násobkem čísla 20.

Načrtnutý postup nyní zobecníme pro libovolné $k \geq 2$. Začneme s množinou $\{1, 2, \dots, k\}$. Chceme všechny její prvky vynásobit takovým číslem N , které je násobkem těch součtů $i + j$ (pro $1 \leq i < j \leq k$), jež nedělí součin $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k = k!$. Jelikož $i + j \leq 2k - 1$, stačí například položit $N = (2k - 1)!$. (Číslo N tak bude násobkem všech možných součtů $i + j$, nejen těch, které nedělí $k!$, což na to, zda výsledná množina vyhovuje, nemá vliv.)

Sestrojili jsme tedy množinu

$$\{(2k - 1)!, 2 \cdot (2k - 1)!, \dots, k \cdot (2k - 1)!\},$$

o které ukážeme, že vyhovuje podmínkám úlohy. Součin jejích prvků je totiž roven $k! \cdot ((2k - 1)!)^k$ a přitom pro každá dvě i, j splňující $1 \leq i < j \leq k$ platí $i + j \mid (2k - 1)!$, a tudíž (vzhledem k podmínce $k \geq 2$)

$$i \cdot (2k - 1)! + j \cdot (2k - 1)! = (i + j) \cdot (2k - 1)! \mid k!((2k - 1)!)^k.$$

¹ Pro splnění podmínek zadání by dokonce stačilo prvky vynásobit číslem $2 \cdot 5 = 10$.

Poznámka. Uvedený postup lze aplikovat obecněji pro libovolnou počáteční k -tici různých přirozených čísel $a_1, a_2, \dots, a_k$. Označme N libovolný společný násobek všech $\binom{k}{2}$ čísel $a_i + a_j$, $1 \leq i < j \leq k$ (můžeme například za N vzít jejich *nejmenší* společný násobek). Pak má k -prvková množina

$$\{Na_1, Na_2, \dots, Na_k\}$$

požadovanou vlastnost, protože součin všech jejích prvků je dělitelný číslem N^k , zatímco součet libovolných dvou jejích prvků je dělitelem čísla N^2 . Poslední tvrzení platí díky tomu, že z podmínky $a_i + a_j \mid N$ vyplývá

$$Na_i + Na_j = N(a_i + a_j) \mid N^2.$$

JINÉ ŘEŠENÍ. Pro $k = 2$ a $k = 3$ lze zkoušením nebo postupem z úvodu prvního řešení objevit vyhovující množiny, např. $\{3, 6\}$ a $\{3, 12, 15\}$. Ukážeme, že pro každé $k \geq 4$ je vyhovující množinou $M = \{2, 6, 10, \dots, 4k - 2\}$, tedy množina dvojnásobků prvních k lichých přirozených čísel. Součin prvků této množiny je

$$2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k - 1). \quad (1)$$

Součet i -tého a j -tého prvku množiny M (pro $1 \leq i < j \leq k$) je roven

$$2(2i - 1) + 2(2j - 1) = 4i + 4j - 4 = 4(i + j - 1) = 4 \cdot 2^\alpha \cdot n,$$

kde n je největší lichý dělitel čísla $i + j - 1$ a α je exponent čísla 2 v prvočíselném rozkladu čísla $i + j - 1$. Jelikož $1 \leq n \leq i + j - 1 \leq 2k - 2$, nachází se činitel n v součinu $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k - 1)$. Matematickou indukcí lze snadno pro $k \geq 4$ dokázat nerovnost $2^{k-1} > 2k - 1$, ze které vyplývá $\alpha \leq k - 2$ (neboť $2^\alpha \mid i + j - 1 < 2k - 1$). Proto $4 \cdot 2^\alpha \mid 2^k$. Dohromady tak dostáváme, že $4 \cdot 2^\alpha \cdot n$ dělí součin (1), což jsme chtěli dokázat.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Dokažte, že pokud pro přirozená čísla a, b, c, d platí $a \mid c$ a $b \mid d$, pak $ab \mid cd$. [Z předpokladů vyplývá, že zlomky $c/a, d/b$ jsou celá čísla, takže i jejich součin cd/ab je celé číslo.]
- N2. Dokažte, že pokud jsou přirozená čísla a, b nesoudělná, pak $a + b \nmid ab$. [Pokud $\text{nsd}(a, b) = 1$, pak $\text{nsd}(a + b, a) = \text{nsd}(a + b - a, a) = \text{nsd}(a, b) = 1$. Podobně $\text{nsd}(a + b, b) = 1$. Odtud $\text{nsd}(a + b, ab) = 1$, takže zlomek $ab/(a + b)$ je v základním tvaru, a protože $a + b > 1$, není celým číslem.]
- N3. Dokažte, že žádná tříprvková množina vyhovující zadání neobsahuje číslo 1. [Sporem: nechť množina $\{1, a, b\}$ vyhovuje. Pak $a + 1 \mid ab$, a jelikož $\text{nsd}(a + 1, a) = 1$, nutně $a + 1 \mid b$, čili $a < b$. Analogicky $b < a$, čímž dostáváme spor.]
- N4. Dokažte, že pro každé přirozené číslo k existuje k po sobě jdoucích přirozených čísel, mezi nimiž není žádné prvočíslo. [Vyhovuje např. k -tice $(k + 1)! + 2, (k + 1)! + 3, \dots, (k + 1)! + (k + 1)$.]
- D1. Dokažte, že existuje rostoucí posloupnost $(a_n)_{n=1}^\infty$ přirozených čísel taková, že pro každé přirozené číslo $k \geq 2$ posloupnost $(k + a_n)_{n=1}^\infty$ obsahuje pouze konečně mnoho prvočísel. Rozhodněte, zda existuje rostoucí posloupnost $(a_n)_{n=1}^\infty$ přirozených čísel taková, že pro každé celé číslo $k \geq 0$ posloupnost $(k + a_n)_{n=1}^\infty$ obsahuje pouze konečně mnoho prvočísel. [46–A–III–4]
- D2. Dokažte matematickou indukcí pro $k \geq 4$ nerovnost $2^{k-1} > 2k - 1$.
- D3. Ukažte, že pro každé celé $k \geq 2$ lze vybrat k různých přirozených čísel tak, aby jejich součin byl dělitelný každým číslem, které je součtem několika z vybraných čísel (ne nutně dvou jako v soutěžní úloze). [Libovolně vybranou k -tici čísel $a_1, a_2, \dots, a_k$ zaměňte za k -tici $Na_1, Na_2, \dots, Na_k$, kde N je společný násobek všech $2^k - k - 1$ součtů $a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_r}$ ($2 \leq r \leq k$).]

4. Předpokládejme, že pro reálná čísla x, y, z platí

$$15(x + y + z) = 12(xy + yz + zx) = 10(x^2 + y^2 + z^2)$$

a že alespoň jedno z nich je různé od nuly.

a) Dokažte rovnost $x + y + z = 4$.

b) Najděte nejmenší interval $\langle a, b \rangle$, v němž leží všechna tři čísla z libovolné trojice (x, y, z) vyhovující předpokladům úlohy.

ŘEŠENÍ. a) Hodnotu, které se rovnají tři výrazy uvedené v zadání, označme a . Platí tedy

$$x + y + z = \frac{1}{15}a, \quad xy + yz + zx = \frac{1}{12}a, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{10}a.$$

Po dosazení do známého vztahu $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ dostaneme pro a rovnici

$$\left(\frac{1}{15}a\right)^2 = \frac{1}{10}a + 2 \cdot \frac{1}{12}a \quad \text{neboli} \quad a(a - 60) = 0.$$

Alespoň jedno z čísel x, y, z je nenulové, proto $a = 10(x^2 + y^2 + z^2) > 0$. Nutně tedy $a = 60$, čili $x + y + z = 60/15 = 4$.

b) Z první části řešení plyne $xy + yz + zx = 60/12 = 5$. Tato rovnost spolu s rovností $x + y + z = 4$ jsou zřejmě ekvivalentním přepisem předpokladů ze zadání. Zapišme je ve tvaru

$$\begin{aligned} x + y &= 4 - z, \\ xy &= 5 - z(x + y) = 5 - z(4 - z) = z^2 - 4z + 5. \end{aligned} \tag{1}$$

Podle Viětových vztahů jsou taková x, y právě kořeny kvadratické rovnice

$$t^2 + (z - 4)t + z^2 - 4z + 5 = 0 \tag{2}$$

s neznámou t a diskriminantem

$$D = (z - 4)^2 - 4(z^2 - 4z + 5) = -3z^2 + 8z - 4 = -(3z - 2)(z - 2).$$

Reálné hodnoty x, y splňující (1) existují, právě když je tento diskriminant nezáporný, tedy když $\frac{2}{3} \leq z \leq 2$. Vzhledem k symetrii platí stejné podmínky i pro proměnné x, y . Hledaný nejmenší interval je proto $\langle \frac{2}{3}, 2 \rangle$.

Poznámka. V uvedeném řešení jsme předpoklady úlohy nahradili ekvivalentními podmínkami. V případě, že bychom dělali jen důsledkové úpravy, museli bychom na závěr ještě ukázat, že pro krajní hodnoty $z = \frac{2}{3}$, resp. $z = 2$ opravdu existují hodnoty x, y splňující zadání. Ty dostaneme jednoduchým dopočítáním dvojnásobných kořenů kvadratické rovnice (2) (neboť diskriminant je pro uvedené hodnoty z nulový). Odpovídající trojice (x, y, z) jsou $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3})$ a $(1, 1, 2)$.

JINÉ ŘEŠENÍ části b). Objevíme-li vyhovující trojice $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3})$ a $(1, 1, 2)$, můžeme dolní a horní ohraničení neznámé z odvodit úpravou následujících zřejmých nerovností

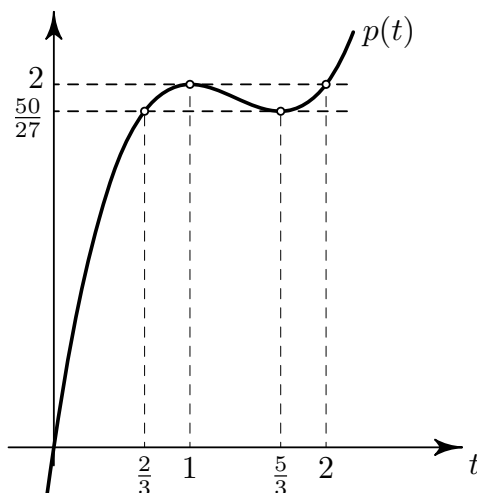
(využijeme přitom vztahy $x + y + z = 4$ a $x^2 + y^2 + z^2 = 60/10 = 6$):

$$\begin{aligned}(x - \frac{5}{3})^2 + (y - \frac{5}{3})^2 + (z - \frac{2}{3})^2 &\geq 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - \frac{10}{3}(x + y + z) + 2z + \frac{54}{9} &\geq 0, \\ 6 - \frac{40}{3} + 2z + \frac{54}{9} &\geq 0, \\ z &\geq \frac{2}{3},\end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 &\geq 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) - 2z + 6 &\geq 0, \\ 6 - 8 - 2z + 6 &\geq 0, \\ 2 &\geq z.\end{aligned}$$

Poznámka. Pokud reálná čísla x, y, z splňují rovnosti $x + y + z = 4$ a $xy + yz + zx = 5$, podle Viètových vztahů jsou trojicí kořenů kubického mnohočlenu $t^3 - 4t^2 + 5t - c$, ve kterém $c = xyz$. Označme $p(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$. Rovnice $p(t) = c$ má tři reálné kořeny, právě když graf konstantní funkce s hodnotou c protíná graf funkce $p(t)$ ve třech bodech; v hraničních případech se grafu dotýká, což odpovídá dvojnásobným kořenem mnohočlenu $p(t) - c$.



Obr. 5

Z obr. 5 je pak vidět, jakých hodnot mohou nabývat x, y, z , a speciálně i jejich ohraničení: $\frac{2}{3} \leq x, y, z \leq 2$. Samozřejmě že při tomto postupu je pro korektní řešení třeba vypočítat, v kterých bodech funkce $p(t)$ nabývá lokální extrémů a následně dopočítat průsečíky příslušných přímk s jejím grafem. Na obr. 5 je pouze grafické shrnutí takového postupu.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Rovnice $x^3 - 5x^2 + 2x + 3 = 0$ má tři reálné kořeny. Jaký je součet jejich druhých mocnin?
[Pokud a, b, c jsou kořeny dané rovnice, platí podle Viètových vztahů $a + b + c = 5$, $ab + bc + ca = 2$, a tedy $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 5^2 - 2 \cdot 2 = 21$.]
- N2. Součin dvou reálných čísel je dvojnásobkem jejich součtu. Jaký může být jejich součet?
[Pokud $a + b = p$ a $ab = 2p$, po vyjádření $b = pa$ a dosazení do druhé rovnice dostaneme

$a^2 - ap + 2p = 0$, což je kvadratická rovnice s diskriminantem $p^2 - 8p$. Ten je nezáporný (existuje tudíž reálné řešení), právě když $p \in (-\infty, 0) \cup \langle 8, \infty \rangle$.

D1. Dokažte, že pokud pro reálná čísla a, b, c platí $a + b + c = 1$, je

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca \geq 1.$$

[46-A-S-3]

D2. Určete všechny trojice reálných čísel a, b, c , které splňují podmínky

$$a^2 + b^2 + c^2 = 26, \quad a + b = 5 \quad a + b + c \geq 7.$$

[62-A-S-3]

D3. Najděte všechny možné hodnoty součtu $x + y$, jestliže reálná čísla x, y splňují rovnost $x^3 + y^3 = 3xy$. [48-B-I-6]

D4. Předpokládejme, že pro kladná reálná čísla a, b, c, d platí

$$ab + cd = ac + bd = 4 \quad a + b + c + d = 5.$$

Najděte nejmenší možnou hodnotu součtu $a + b + c + d$ a zjistěte, které vyhovující čtveřice a, b, c, d ji dosahují. [61-A-II-4]

D5. Předpokládejme, že reálná čísla x, y, z vyhovují soustavě rovnic

$$x + y + z = 12, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 54.$$

Dokažte, že pak platí následující tvrzení: a) Každé z čísel xy, yz, zx je alespoň 9, avšak nejvýše 25. b) Některé z čísel x, y, z je nejvýše 3 a jiné z nich je alespoň 5. [60-A-III-3]

5. V daném trojúhelníku ABC označme D bod dotyku kružnice vepsané se stranou BC . Kružnice vepsaná trojúhelníku ABD se dotýká stran AB a BD v bodech K a L . Kružnice vepsaná trojúhelníku ADC se dotýká stran DC a AC v bodech M a N . Dokažte, že body K, L, M, N leží na jedné kružnici.

ŘEŠENÍ. Na úvod připomeňme známé tvrzení: Jsou-li D, E, F body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC postupně se stranami BC, CA, AB a délky stran jsou označeny jako obvykle, je

$$|AE| = |AF| = \frac{b + c - a}{2}, \quad |BF| = |BD| = \frac{c + a - b}{2}, \quad |CD| = |CE| = \frac{a + b - c}{2}.$$

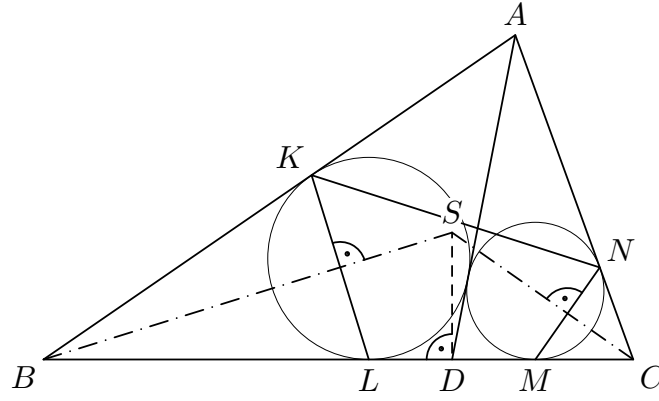
Toto tvrzení jsme zformulovali pouze pro trojúhelník ABC , v řešení je však budeme využívat i pro trojúhelníky ABD a ACD .

K důkazu toho, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětíkový, stačí ukázat, že osy tří jeho stran se protínají v jednom bodě.² Přitom osy jeho stran KL a MN jsou zároveň osami vnitřních úhlů trojúhelníku ABC při vrcholech B a C , protože trojúhelníky LKB, MNC jsou rovnoramenné se základnami LK, MN . Tyto dvě osy se protínají ve středu kružnice vepsané trojúhelníku ABC , který jsme označili S (obr. 6). Dokážeme, že tímto bodem prochází i osa strany LM .

Jelikož poloměr SD vepsané kružnice je kolmý na stranu BC , potřebujeme dokázat, že D je středem úsečky LM (pak SD bude její osou). K tomu využijeme úvodní tvrzení. Jeho aplikací na trojúhelník ABD a úsek DL a následně na trojúhelník ABC a úsek BD dostaneme

$$|DL| = \frac{|BD| + |AD| - |AB|}{2} = \frac{\frac{1}{2}(c + a - b) + |AD| - c}{2} = \frac{\frac{1}{2}(a - b - c) + |AD|}{2}.$$

² Takový průsečík má totiž stejnou vzdálenost od všech čtyř jeho vrcholů, tudíž existuje kružnice, která v něm má střed a prochází všemi čtyřmi vrcholy.



Obr. 6

Podobně máme

$$|DM| = \frac{|CD| + |AD| - |AC|}{2} = \frac{\frac{1}{2}(a + b - c) + |AD| - b}{2} = \frac{\frac{1}{2}(a - b - c) + |AD|}{2}.$$

Odtud $|DL| = |DM|$, takže D je opravdu středem úsečky LM , což jsme chtěli dokázat.

Poznámka. Z faktu, že $|DL| = |DM|$, kromě jiného vyplývá i to, že kružnice vepsané trojúhelníkům ABD a ADC se dotýkají úsečky AD ve stejném bodě.

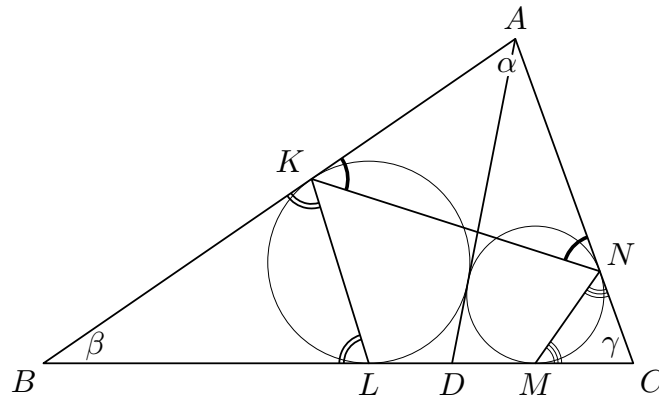
JINÉ ŘEŠENÍ. Opět vícekrát využijeme tvrzení z úvodu prvního řešení. Podle něj pro délku úseku AK v trojúhelníku ABD máme

$$|AK| = \frac{|AB| + |AD| - |BD|}{2} = \frac{c + |AD| - \frac{1}{2}(c + a - b)}{2} = \frac{|AD| + \frac{1}{2}(b + c - a)}{2}$$

a podobně

$$|AN| = \frac{|AD| + \frac{1}{2}(b + c - a)}{2}.$$

Jelikož $|AK| = |AN|$, je trojúhelník KNA rovnoramenný (obr. 7), čili $|\sphericalangle ANK| =$



Obr. 7

$= 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Z rovnoramenných trojúhelníků LKB , MNC máme $|\sphericalangle BLK| = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$, $|\sphericalangle MNC| = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$. Na základě toho jednoduše vyjádříme

$$|\sphericalangle KLM| = 180^\circ - |\sphericalangle BLK| = 90^\circ + \frac{1}{2}\beta,$$

$$|\sphericalangle MNK| = 180^\circ - |\sphericalangle MNC| - |\sphericalangle ANK| = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma,$$

odkud $|\sphericalangle KLM| + |\sphericalangle MNK| = 90^\circ + \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 180^\circ$, což znamená, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětíkový, jak jsme měli dokázat.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Necht P je bod ležící ve vnější oblasti dané kružnice k . Tímto bodem vedeme tečny, které se kružnice k dotýkají postupně v bodech U, V . Dokažte, že $|PU| = |PV|$. [Vyplývá to ze souměrnosti podle přímky PS , kde S je střed kružnice k .]
- N2. Dokažte, že kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran v bodech D, E, F určených rovnostmi $|AE| = |AF| = s - a$, $|BF| = |BD| = s - b$, $|CD| = |CE| = s - c$, kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. [Rovnosti $|AE| = |AF|$, $|BF| = |BD|$, $|CD| = |CE|$ vyplývají z předešlé návodné úkoly. Pokud délky těchto úseků označíme x, y, z , dostaneme soustavu $x + y = c$, $y + z = a$, $z + x = b$, jejíž řešením dostaneme vyjádření $x = \frac{1}{2}(b + c - a) = s - a$, $y = \frac{1}{2}(c + a - b) = s - b$, $z = \frac{1}{2}(a + b - c) = s - c$.]
- N3. Dokažte, že pokud se osy některých tří stran čtyřúhelníku protínají v jednom bodě, je tento čtyřúhelník tětíkový. [Průsečík os tří stran je stejně vzdálen od všech čtyř vrcholů.]
- N4. Necht D, E, F jsou body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC s jeho stranami. Dokažte, že trojúhelník DEF je ostroúhlý. [Velikosti úhlů trojúhelníku DEF jsou $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, $90^\circ - \frac{1}{2}\beta$, $90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$, což jsou všechno ostré úhly.]
- D1. Necht K, L, M jsou po řadě vnitřní body stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC takové, že kružnice vepsané dvojicím trojúhelníků ABK a CAK , BCL a ABL , CAM a BCM mají vnější dotyk. Pak platí

$$|BK| \cdot |CL| \cdot |AM| = |CK| \cdot |AL| \cdot |BM|.$$

Dokažte. [49–A–I–2]

- D2. Na přímce a , na které leží strana BC trojúhelníku ABC , jsou dány body dotyku všech tří jemu přiřazených kružnic (body B a C nejsou známy). Najděte na této přímce bod dotyku kružnice vepsané. [63–B–S–3]

6. Necht a, b jsou daná, navzájem nesoudělná přirozená čísla. Posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ přirozených čísel je sestavena tak, že pro každé $n > 1$ platí $x_n = ax_{n-1} + b$. Dokažte, že v libovolné takové posloupnosti každý člen x_n s indexem $n > 1$ dělí nekonečně mnoho jejích dalších členů. Platí toto tvrzení i pro $n = 1$?

ŘEŠENÍ. Ukážeme, že pro každé $n > 1$ existuje $k > 0$ takové, že $x_n \mid x_{n+k}$. Z toho pak nutně vyplývá, že každý člen posloupnosti (s případnou výjimkou prvního členu) dělí nekonečně mnoho dalších členů, protože opakované použití tohoto tvrzení zaručuje existenci nekonečné posloupnosti relací

$$x_n \mid x_{n+k_1} \mid x_{n+k_1+k_2} \mid x_{n+k_1+k_2+k_3} \mid \dots$$

Necht tedy $n > 1$ je pevné. Vyjádřeme následující členy pomocí parametrů a, b a x_n . Pomocí daného předpisu postupně dostaneme

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n + b, \\ x_{n+2} &= a(ax_n + b) + b = a^2x_n + b(1 + a), \\ x_{n+3} &= a(a^2x_n + b + ba) + b = a^3x_n + b(1 + a + a^2), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Obecně pro každé celé $k > 0$ platí

$$x_{n+k} = a^k x_n + b(1 + a + \dots + a^{k-1}),$$

což se dá formálně dokázat triviální matematickou indukcí. Proto požadovaná vlastnost $x_n \mid x_{n+k}$ je ekvivalentní s podmínkou $x_n \mid b(1 + a + \dots + a^{k-1})$. Ukážeme, že existuje k , pro něž

$$x_n \mid 1 + a + \dots + a^{k-1}, \quad (1)$$

čímž bude zaručeno, že x_n dělí x_{n+k} .

Uvažujme posloupnost

$$1, 1 + a, 1 + a + a^2, 1 + a + a^2 + a^3, \dots,$$

tj. posloupnost čísel $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ s předpisem $s_k = 1 + a + \dots + a^{k-1}$. V této nekonečné posloupnosti určité existují dva členy, které dávají stejný zbytek při dělení číslem x_n , protože možných zbytků je jen konečně mnoho. Řekněme, že jsou to členy s_{k_1} a s_{k_2} , přičemž $k_1 < k_2$. Rozdíl $s_{k_2} - s_{k_1}$ je pak dělitelný číslem x_n , čili

$$x_n \mid (1 + a + \dots + a^{k_2-1}) - (1 + a + \dots + a^{k_1-1}) = a^{k_1}(1 + a + \dots + a^{k_2-k_1-1}). \quad (2)$$

Čísla a, b jsou nesoudělná, proto číslo $x_n = ax_{n-1} + b$ je nesoudělné s a (žádný netriviální dělitel čísla a nedělí b , a tedy nedělí ani $ax_{n-1} + b$), čili i čísla x_n a a^{k_1} jsou nesoudělná. Z (2) proto vyplývá

$$x_n \mid 1 + a + \dots + a^{k_2-k_1-1},$$

čímž jsme dokázali platnost (1) pro $k = k_2 - k_1 > 0$.

Tvrzení o členu x_1 obecně neplatí, čísla x_1 a a totiž nemusejí být nesoudělná (to byla v předchozím postupu jediná podmínka k tomu, abychom našli $k > 0$ takové, že $x_n \mid x_{n+k}$). Vskutku, pokud například zvolíme $a > 1$ a $x_1 = a$, bude relace $x_1 \mid x_n$ platit pouze pro $n = 1$, neboť každý člen x_n s indexem $n > 1$ je podle vyjádření $x_n = ax_{n-1} + b$ číslo, které je — stejně jako dané b — s číslem a (tedy i se zvoleným číslem x_1) nesoudělné.

JINÉ ŘEŠENÍ. Odlišným způsobem dokážeme, že pro každé $n > 1$ existuje $k > 0$, pro které platí (1). Podobně jako v předchozím řešení odvodíme, že čísla x_n a a jsou nesoudělná. Podle Eulerovy věty je posloupnost zbytků čísel $1, a, a^2, a^3, \dots$ při dělení číslem x_n periodická od prvního členu, přičemž délka periody (ne nutně nejkratší) je $\varphi(x_n)$.³

Pro zjednodušení zápisu označme $\varphi(x_n) = r$. Vzhledem k uvedenému platí

$$\begin{aligned} a^0 &\equiv a^r &\equiv a^{2r} &\equiv \dots &\equiv a^{(x_n-1)r} & \pmod{x_n}, \\ a^1 &\equiv a^{r+1} &\equiv a^{2r+1} &\equiv \dots &\equiv a^{(x_n-1)r+1} & \pmod{x_n}, \\ &\vdots \\ a^{r-1} &\equiv a^{2r-1} &\equiv a^{3r-1} &\equiv \dots &\equiv a^{x_n r-1} & \pmod{x_n}. \end{aligned}$$

Proto součet všech vypsaných mocnin čísla a (kterých je x_n v každém řádku) je kongruentní podle modulu x_n s x_n -násobkem součtu r mocnin vybraných po jedné z každého řádku. Jakýkoliv x_n -násobek je však kongruentní s nulou, a tak je platnost (1) ověřena pro $k = x_n \cdot r = x_n \cdot \varphi(x_n)$.

³ Funkce φ je tzv. Eulerova funkce, tj. $\varphi(m)$ je počet přirozených čísel menších než m , která jsou s m nesoudělná.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Zopakujte si a dokažte následující tvrzení z teorie čísel:

- a) pokud $\text{nsd}(a, b) = 1$ a $a \mid bc$, pak $a \mid c$;
- b) $\text{nsd}(a, b) = \text{nsd}(a - kb, b)$;
- c) pokud $\text{nsd}(a, b) = 1$, pak $\text{nsd}(a^m, b^n) = 1$.

N2. Je dána k -prvková množina M , jejíž prvky jsou celá čísla. Dokažte, že existuje neprázdná podmnožina množiny M , součet jejích prvků je násobkem čísla k . [Nechť $M = \{a_1, \dots, a_k\}$. Pokud se mezi k čísla $a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_k$ nachází násobek k , je tvrzení zřejmé. V opačném případě se mezi nimi nacházejí dvě čísla $a_1 + \dots + a_i, a_1 + \dots + a_j, i < j$, jež dávají při dělení číslem k stejný zbytek, takže jejich rozdíl je násobkem k , a přitom je to zároveň i součet prvků množiny $\{a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_j\}$.]