

Úlohy domácí části I. kola kategorie C

1. Určete všechny dvojice (x, y) reálných čísel, která vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+4)^2} &= 4-y, \\ \sqrt{(y-4)^2} &= x+8.\end{aligned}$$

ŘEŠENÍ. Vzhledem k tomu, že pro každé reálné číslo a platí $\sqrt{a^2} = |a|$, je daná soustava rovnic ekvivalentní se soustavou rovnic

$$\begin{aligned}|x+4| &= 4-y, \\ |y-4| &= x+8.\end{aligned}$$

Z první rovnice vidíme, že musí být $4-y \geq 0$, tedy $y \leq 4$. Ve druhé rovnici lze tudíž odstranit absolutní hodnotu. Dostaneme tak

$$|y-4| = 4-y = x+8, \quad \text{tj.} \quad -y = x+4.$$

Po dosazení za $x+4$ do první rovnice dostaneme

$$|-y| = |y| = 4-y.$$

Protože $y \leq 4$, budeme dále uvažovat dva případy.

Pro $0 \leq y \leq 4$ řešíme rovnici $y = 4-y$, a tedy $y = 2$. Nalezené hodnotě $y = 2$ odpovídá po dosazení do druhé rovnice $x = -6$.

Pro $y < 0$ dostaneme rovnici $-y = 4-y$, která však nemá řešení.

Závěr. Daná soustava rovnic má právě jedno řešení, a to $(x, y) = (-6, 2)$.

JINÝ ZPŮSOB ŘEŠENÍ. Odstraněním absolutních hodnot v obou rovnicích, tj. rozbořením čtyř možných případů, kdy

- a) $(x+4 \geq 0) \wedge (y-4 \geq 0)$, tj. $(x \geq -4) \wedge (y \geq 4)$,
- b) $(x+4 \geq 0) \wedge (y-4 < 0)$, tj. $(x \geq -4) \wedge (y < 4)$,
- c) $(x+4 < 0) \wedge (y-4 \geq 0)$, tj. $(x < -4) \wedge (y \geq 4)$,
- d) $(x+4 < 0) \wedge (y-4 < 0)$, tj. $(x < -4) \wedge (y < 4)$,

zjistíme, že případy a), b), c) neposkytují (s ohledem na uvedená omezení v jednotlivých případech) žádné reálné řešení. V případě d) pak dostaneme jediné řešení $(x, y) = (-6, 2)$ dané soustavy.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. V oboru reálných čísel řešte rovnici:
 - a) $|x| = x+2$ [$x = -1$]
 - b) $|2x+2| = x+4$ [$x = -2, x = 2$]
 - c) $|x-1| = |x|-1$ [$x \geq 1$]
2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:
 - a) $|x+2| = y-1, |y-5| = -x$ [$x = -3, y = 2$]
 - b) $|x-1| = y, |x-2| = y+2$ [soustava nemá řešení]
 - c) $|x| = y+1, x = |y|+1$ [$x \geq 1, y \geq 0$]

2. Petr má zvláštní hodinky se třemi ručičkami – první z nich oběhne kruhový ciferník za minutu, druhá za 3 minuty a třetí za 15 minut. Na začátku jsou všechny ručičky ve stejné poloze. Určete, za jak dlouho budou ručičky rozdělovat ciferník na tři shodné části. Najděte všechna řešení.

ŘEŠENÍ. Představme si klasický ciferník s čísly 1–12. Bez újmy na obecnosti si představme, že na začátku jsou všechny tři ručičky na čísle 12.

Pootočí-li se 15minutová ručička o úhel α , pootočí se 3minutová ručička o úhel 5α a minutová ručička o úhel 15α . Jelikož každé dvě ručičky v hledaných polohách spolu svírají úhel 120° a 3minutová ručička je rychlejší než 15minutová, dají se hledané polohy získat jako řešení rovnice $5\alpha - \alpha = k \cdot 120^\circ$, kterými jsou úhly $\alpha = k \cdot 30^\circ$, kde k nabývá kladných celých hodnot, jež nejsou násobky tří, jinak by se dotyčné ručičky překrývaly.

Můžeme tedy postupovat tak, že budeme testovat hodnoty $\alpha = k \cdot 30^\circ$ postupně pro jednotlivé hodnoty čísla k . Skutečně tak začneme a průběžně uvidíme, jak se dají po několika krocích díky periodičnosti získat všechna další řešení dané úlohy.

Uvažujme nejprve $k = 1$, tedy $\alpha = 30^\circ$. Při této hodnotě se pootočila nejrychlejší ručička o úhel 450° . V tomto okamžiku se nejpomalejší ručička nachází na čísle 1 ciferníku, druhá ručička na čísle 5 a nejrychlejší ručička na čísle 3. Tento případ tedy není řešením dané úlohy.

Nechť je dále $k = 2$ neboli $\alpha = 60^\circ$. Při této hodnotě se pootočila nejrychlejší ručička o úhel 900° . V tomto okamžiku se nejpomalejší ručička nachází na čísle 2 ciferníku, druhá ručička na čísle 10 a nejrychlejší ručička na čísle 6. Tento případ je tedy jedním řešením dané úlohy.

Vidíme, že můžeme sestavit tabulku, z níž jednoduše vyčteme všechna řešení:

	polohy příslušné ručičky na ciferníku				
	15minutová	3minutová	minutová	je řešením?	čas
$k = 1$	1	5	3	ne	1,25 min
$k = 2$	2	10	6	ano	$2 \cdot 1,25$ min
$k = 4$	4	8	12	ano	$4 \cdot 1,25$ min
$k = 5$	5	1	3	ne	
$k = 7$	7	11	9	ne	
$k = 8$	8	4	12	ano	$8 \cdot 1,25$ min
$k = 10$	10	2	6	ano	$10 \cdot 1,25$ min
$k = 11$	11	7	9	ne	
$k = 12$	12	12	12	ne	

Do tabulky jsme uvedli i „zakázanou“ hodnotu $k = 12$ dělitelnou třemi, při které se všechny tři ručičky překryjí, takže v dalším průběhu se budou jejich polohy periodicky opakovat. Časy, ve kterých to nastane, budou vždy o 15 minut delší. Zjistili jsme tak, že všechny hledané časy jsou

$$t = (12n + 2) \cdot 1,25 \text{ min} = (15n + 2,5) \text{ min},$$

$$t = (12n + 4) \cdot 1,25 \text{ min} = (15n + 5) \text{ min},$$

$$t = (12n + 8) \cdot 1,25 \text{ min} = (15n + 10) \text{ min},$$

$$t = (12n + 10) \cdot 1,25 \text{ min} = (15n + 12,5) \text{ min},$$

kde $n = 0, 1, 2, \dots$

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- Jaký úhel spolu svírají hodinová a minutová ručička v 1:30 na ciferníku
 - s 12 čísly, $[135^\circ]$
 - s 24 čísly? $[157,5^\circ]$
- Na ciferníku s 12 čísly najděte všechny časy, kdy budou hodinová a minutová ručička svírat úhel 120° v intervalu
 - 0–12 hodin, $[\frac{4}{11} \text{ h}, 2 \cdot \frac{4}{11} \text{ h}, 4 \cdot \frac{4}{11} \text{ h}, 5 \cdot \frac{4}{11} \text{ h}, 7 \cdot \frac{4}{11} \text{ h}, 8 \cdot \frac{4}{11} \text{ h}, 10 \cdot \frac{4}{11} \text{ h}, 11 \cdot \frac{4}{11} \text{ h}, 13 \cdot \frac{4}{11} \text{ h}, 14 \cdot \frac{4}{11} \text{ h}, 16 \cdot \frac{4}{11} \text{ h}, 17 \cdot \frac{4}{11} \text{ h}, 19 \cdot \frac{4}{11} \text{ h}, 20 \cdot \frac{4}{11} \text{ h}, 22 \cdot \frac{4}{11} \text{ h}, 23 \cdot \frac{4}{11} \text{ h}, 25 \cdot \frac{4}{11} \text{ h}, 26 \cdot \frac{4}{11} \text{ h}, 28 \cdot \frac{4}{11} \text{ h}, 29 \cdot \frac{4}{11} \text{ h}, 31 \cdot \frac{4}{11} \text{ h}, 32 \cdot \frac{4}{11} \text{ h}]$
 - 0– ∞ hodin. $[(3n+1) \cdot \frac{4}{11} \text{ h}, (3n+2) \cdot \frac{4}{11} \text{ h}, n = 0, 1, 2, \dots]$

- 3.** *Simona a Lenka hrají hru. Pro dané celé číslo k takové, že $0 \leq k \leq 64$, vybere Simona k políček šachovnice 8×8 a každé z nich označí křížkem. Lenka pak šachovnici nějakým způsobem vyplní dvaatřiceti dominovými kostkami. Je-li počet kostek pokrývajících dva křížky lichý, vyhrává Lenka, jinak vyhrává Simona. V závislosti na k určete, která z dívek má vyhrávající strategii.*

ŘEŠENÍ. Řešení rozdělme podle hodnoty čísla k .

Je-li $k = 0$, je počet kostek pokrývajících dva křížky roven nule, proto vyhraje Simona.

Je-li $0 < k \leq 32$, umístí Simona křížky např. jen na bílá pole šachovnice. Pak pod žádnou kostkou nejsou dva křížky, proto vyhraje Simona.

Je-li $k > 32$, k sudé, umístí Simona 32 křížků na bílá pole a zbylé křížky kamkoli. Pak pod sudým počtem kostek jsou dva křížky (takových kostek je totiž právě $k - 32$, protože každá dominová kostka pokrývá jedno bílé a jedno černé pole šachovnice), takže vyhraje Simona.

Je-li $32 < k \leq 61$, k liché, nenapíše Simona křížky do tří polí v jednom z „bílých rohů“, tj. do rohového bílého a do dvou sousedních černých polí, ale napíše je do všech ostatních 31 bílých polí a zbytek do jakýchkoli černých polí (kromě zmíněných dvou). Na bílých polích je tedy lichý počet křížků a na černých sudý počet křížků. Kolem každého černého pole s křížkem jsou všechna bílá pole také s křížkem, proto každá kostka, která zakrývá černé pole s křížkem, zakrývá dva křížky. Jiné kostky dva křížky nezakrývají. Proto opět vyhraje Simona.

Je-li $k = 63$, nejsou dva křížky jen pod jedinou kostkou, proto v takovém případě vyhraje Lenka, a to bez potřeby jakékoli strategie.

Shrnutí: Pro každé $0 \leq k \leq 64$, $k \neq 63$, má vítěznou strategii Simona, při $k = 63$ vítězí automaticky Lenka.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

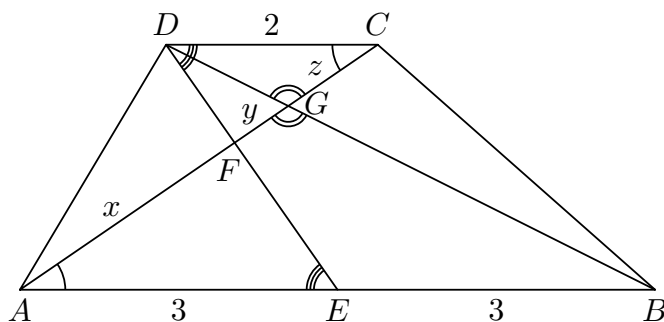
- Řešte danou úlohu pro šachovnice 2×2 a 4×4 .
- Jak se změní výsledek dané úlohy, budeme-li místo dvou křížků pod kostkou uvažovat podmínku, že pod kostkou není ani jeden křížek?
- Simona a Lenka hrají hru. Pro dané celé číslo k takové, že $0 \leq k \leq 9$, vybere Simona k políček šachovnice 3×3 a na každé z nich napíše číslo 1, na ostatní políčka napíše číslo 0. Lenka pak šachovnici nějakým způsobem pokryje třemi triminovými kostkami, tj. kostkami tvaru 3×1 , a čísla pod jejími políčky vynásobí. Je-li počet kostek se součinem 0 lichý, vyhrává Simona, jinak vyhrává Lenka. V závislosti na k určete, kolikaprocentní vítěznou strategii má Simona. [80%]

4. Označme E střed základny AB lichoběžníku $ABCD$, v němž platí $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Úhlopříčka AC protíná úsečky ED , BD po řadě v bodech F , G . Určete postupný poměr

$$|AF| : |FG| : |GC|.$$

ŘEŠENÍ. Jelikož v zadání i v otázce úlohy jsou jen poměry, můžeme si délky stran lichoběžníku zvolit jako vhodná konkrétní čísla. Zvolme tedy např. $|AB| = 6$, pak $|AE| = |BE| = 3$ a $|CD| = 2$. Hledané délky označme $|AF| = x$, $|FG| = y$, $|GC| = z$. Tyto délky jsme vyznačili na obr. 1 stejně jako tři dvojice shodných úhlů, které nyní využijeme k úvahám o trojúhelnících podobných podle věty *uu*.

Trojúhelníky ABG a CDG jsou podobné, proto $(x + y) : z = 6 : 2 = 3 : 1$. Také trojúhelníky AEF a CDF jsou podobné, proto $x : (y + z) = 3 : 2$.



Obr. 1

Odvozené úměry zapíšeme jako soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 0, \\ 2x - 3y - 3z &= 0. \end{aligned}$$

Jejich odečtením získáme rovnost $x = 4y$ neboli $x : y = 4 : 1$. Dosazením tohoto výsledku do první rovnice dostaneme $5y = 3z$ neboli $y : z = 3 : 5$. A spojením obou poměrů získáme výsledek $x : y : z = 12 : 3 : 5$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- Lichoběžník $ABCD$ má základny o délkách $|AB| = a$, $|CD| = c$, jeho úhlopříčky se protínají v bodě U .
 - Dokažte, že trojúhelníky ABU a CDU jsou podobné a určete poměr podobnosti. Jaký je poměr obsahů těchto trojúhelníků? [$a^2 : c^2$]
 - Dokažte, že obsahy trojúhelníků ADU a BCU jsou stejné.
- Je $a : b = 1 : 2$, $b : c = 3 : 4$, $c : d = 5 : 6$. Určete $a : b : c : d$. [$15 : 30 : 40 : 48$]

5. Rozdíl dvou přirozených čísel je 2010 a jejich největší společný dělitel je 2014krát menší než jejich nejmenší společný násobek. Určete všechny takové dvojice čísel.

ŘEŠENÍ. Označme hledaná čísla a a b ($a > b$) a d jejich největší společný dělitel. Pak $a = md$, $b = nd$, kde $m > n$ jsou nesoudělná čísla. Protože nejmenší společný násobek čísel a, b je číslo mnd , dosazením do zadaných vztahů dostaneme rovnosti

$$\begin{aligned} a - b &= (m - n)d = 2010, \\ mnd &= 2014d \quad \text{neboli} \quad mn = 2014. \end{aligned}$$

Podle rozkladu na prvočinitele $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ vypíšeme všechny možné dvojice (m, n) a pro každou z nich se přesvědčíme, zda číslo $m - n$ je dělitelem čísla 2010.

V kladném případě příslušný podíl udává číslo d a výpočet neznámých $a = md$ a $b = nd$ je nasnadě:

- a) $m = 2\,014$ a $n = 1$: $m - n = 2\,013$ nedělí $2\,010$;
- b) $m = 19 \cdot 53 = 1\,007$ a $n = 2$: $m - n = 1\,005 \nmid 2\,010$, $d = 2$, $a = 1\,007 \cdot 2 = 2\,014$,
 $b = 2 \cdot 2 = 4$;
- c) $m = 2 \cdot 53 = 106$ a $n = 19$: $m - n = 87$ nedělí $2\,010$;
- d) $m = 53$ a $n = 2 \cdot 19 = 38$: $m - n = 15 \nmid 2\,010$, $d = 134$, $a = 53 \cdot 134 = 7\,102$,
 $b = 38 \cdot 134 = 5\,092$.

Závěr: Hledaná čísla tvoří jednu z dvojic $(2\,014, 4)$ nebo $(7\,102, 5\,092)$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Najděte všechny dělitele čísla $2\,014$. $[1, 2, 19, 38, 53, 106, 1\,007, 2\,014]$
2. Rozdíl dvou přirozených čísel je 5 a jejich největší společný dělitel je 6 krát menší než jejich nejmenší společný násobek. Určete obě takové dvojice čísel.
3. Dokažte, že pro každá dvě přirozená čísla a, b a jejich největšího společného dělitele D a jejich nejmenší společný násobek n platí $ab = nD$.
4. Platí pro každá tři přirozená čísla a, b, c a jejich největšího společného dělitele D a jejich nejmenší společný násobek n rovnost $abc = nD$?
5. Mají-li přirozená čísla a, b největšího společného dělitele D , mají stejného největšího společného dělitele i čísla $a, b, a - b, a + b$. Dokažte. Platí stejné tvrzení pro nejmenší společný násobek?

- 6.** *Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že v zápise čísla $\sqrt{n}$ následují bezprostředně za desetinnou čárkou dvě devítky.*

ŘEŠENÍ. Označme a nejbližší větší přirozené číslo k iracionálnímu číslu $\sqrt{n}$. Podle zadání pak platí $a - 0,01 \leq \sqrt{n}$. Protože a^2 je přirozené číslo větší než n , musí dohromady platit

$$(a - 0,01)^2 \leq n \leq a^2 - 1.$$

Po úpravě nerovnosti mezi krajními výrazy vyjde

$$\frac{1}{50}a \geq 1,0001 \quad \text{neboli} \quad a \geq 50,005.$$

Jelikož je číslo a celé, plyne odtud $a \geq 51$. A protože

$$(51 - 0,01)^2 = 2\,601 - \frac{102}{100} + \frac{1}{100^2} \in (2\,599, 2\,600),$$

je hledaným číslem $n = 2\,600$.

Poznámka. Za správné řešení lze uznat i řešení pomocí kalkulačky. Mají-li totiž být za desetinnou čárkou dvě devítky, musí být číslo n hodně blízko zleva k nějaké druhé mocnině. Proto stačí na kalkulačce vyzkoušet čísla $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{15}$ atd. Jelikož je $51^2 = 2\,601$, najdeme, že $\sqrt{2\,600} = 50,990\,195\dots$

Pracnější úlohou by bylo najít nejmenší číslo n , pro něž za desetinnou čárkou iracionálního čísla $\sqrt{n}$ jsou dvě osmičky, či dvě sedmičky apod.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Není-li přirozené číslo n druhou mocninou jiného přirozeného čísla, dokažte, že $\sqrt{n}$ je číslo iracionální.
2. Najděte pomocí kalkulačky nejmenší přirozené číslo n takové, že v zápise iracionálního čísla $\sqrt{n}$ následuje bezprostředně za desetinnou čárkou devítka. $[\sqrt{35} = 5,916\,079\dots]$
3. Najděte všechna přirozená čísla n taková, že v zápise iracionálního čísla $\sqrt{n}$ následuje bezprostředně za desetinnou čárkou devítka.
4. Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že v zápise iracionálního čísla $\sqrt{n}$ následují bezprostředně za desetinnou čárkou dvě nuly. $[\sqrt{2\,501} = 50,009\,999\dots]$
5. Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že v zápise iracionálního čísla $\sqrt{n}$ následují bezprostředně za desetinnou čárkou dvě stejné cifry. [na kalkulačce $\sqrt{43} = 6,557\,438\dots]$