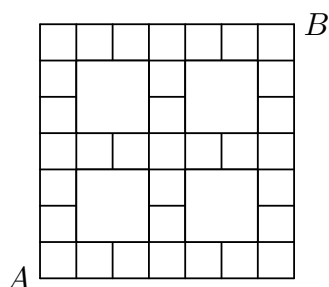


64. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie A

1. Určete počet cest délky 14, které vedou po hranách sítě na obrázku z bodu A do bodu B . Délka každé hrany je jedna.



2. Je dán rovnoběžník $ABCD$, přičemž $|AB| = 2|BC|$. Určete všechny přímky, které dělí daný rovnoběžník na dva tečnové čtyřúhelníky.
3. Určete všechny dvojice (p, q) celých čísel takových, že p je celočíselným násobkem čísla q a kvadratická rovnice $x^2 + px + q = 0$ má alespoň jeden celočíselný kořen.

Klauzurní část školního kola kategorie A se koná

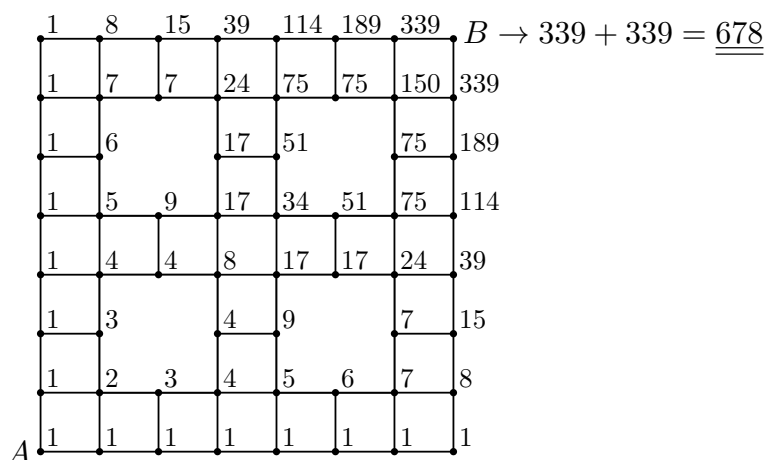
v úterý 9. prosince 2014

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

64. ročník matematické olympiády

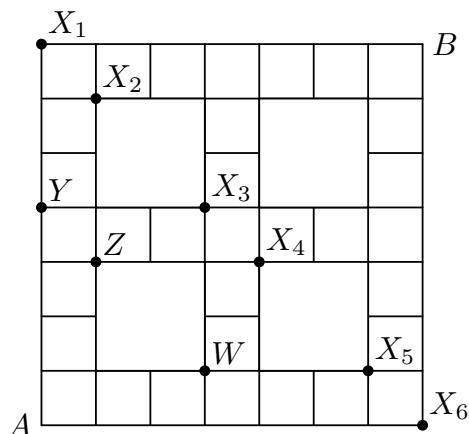
Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie A

1. Každá cesta z bodu A do bodu B délky 14 se nutně skládá ze sedmi hran směrem doprava a sedmi hran směrem nahoru. Postupně zleva doprava a zdola nahoru přepíšeme ke každému bodu sítě, kolik cest z bodu A složených z hran vedoucích vzhůru a doprava do něj vede (obr. 1). Pokud se dá do některého bodu přijít jen z jednoho směru, bude počet cest stejný jako počet cest vedoucích do bodu, z kterého přicházíme. Pokud se dá přijít ze dvou směrů, bude počet cest součtem počtů cest vedoucích do bodů, z nichž můžeme přijít. Takto umíme vyplnit celou síť. Hledaný počet cest se rovná číslu, které na konci přepíšeme k bodu B . (Při vyplňování můžeme využít osovou souměrnost podle přímky AB , a ušetřit si tak část práce.)



Obr. 1

Jiné řešení. Pro snadnější vyjadřování označme některé body sítě jako na obr. 2. Každá cesta z bodu A do bodu B délky 14 se skládá ze sedmi hran směrem doprava a sedmi hran směrem nahoru. Úhlopříčku X_1X_6 tak musí přetnout právě jednou, a to v jednom z šesti bodů $X_1, \dots, X_6$. Pro každý z nich spočítáme, kolik cest jím vede. V dalším textu budeme pod pojmem „cesta“ rozumět pouze trasy složené z hran směrem doprava a nahoru.



Obr. 2

Vzhledem k tomu, že síť je osově souměrná podle přímky X_1X_6 , je obrazem každé cesty z A do X_i pro každé $i = 1, 2, \dots, 6$ v této osově souměrnosti cesta z X_i do B a naopak. Počet cest z A do X_i je proto roven počtu cest z X_i do B . Jelikož každou cestu z A do X_i můžeme zkombinovat s libovolnou cestou z X_i do B , je celkový počet cest z A do B vedoucích bodem X_i roven druhé mocnině počtu cest z A do X_i . Stačí tedy určit počet cest z A do X_i pro každé $i = 1, 2, \dots, 6$ a tato čísla umocnit na druhou a sečíst:

- Do bodu X_1 vede z A jediná cesta složená ze sedmi hran nahoru.
- Do bodu X_2 vede z A celkem 7 cest — právě jedna ze sedmi hran musí vést doprava a může to být kterákoli v jejich pořadí na cestě.
- Do bodu X_3 se dá z A dostat jedině některým (právě jedním) z bodů Y, Z, W :
 - ▷ Bodem Y vede jediná cesta.
 - ▷ Do bodu Z vedou z A čtyři cesty (jedna ze čtyř hran je doprava), z bodu Z do X_3 vedou tři cesty (jedna ze tří hran je nahoru). Bodem Z do bodu X_3 tak můžeme projít $4 \cdot 3 = 12$ způsoby.
 - ▷ Do bodu W vedou z A čtyři cesty (jedna ze čtyř hran je nahoru), z bodu W do X_3 vede jediná cesta. Bodem W proto vedou čtyři cesty.

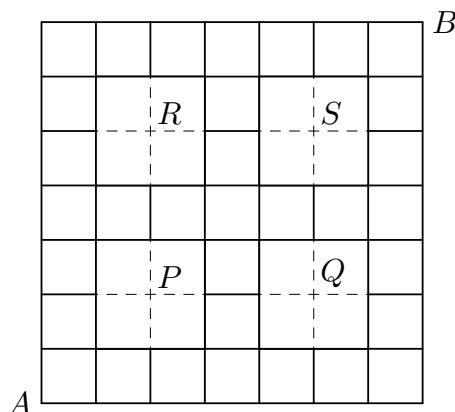
Z A do X_3 tedy vede celkem $1 + 12 + 4 = 17$ cest.

Jelikož síť je osově souměrná i podle přímky AB , do bodů X_4, X_5, X_6 vede z A postupně stejný počet cest jako do bodů X_3, X_2, X_1 . Vzhledem k uvedenému je celkový počet cest z A do B roven

$$1^2 + 7^2 + 17^2 + 17^2 + 7^2 + 1^2 = (1 + 49 + 289) \cdot 2 = 678.$$

Jiné řešení. Uvedme nejdříve známé pomocné tvrzení: *Pokud je síť „kompletní“ a má šířku m a výšku n , je počet cest délky $m+n$ vedoucích z levého dolního do pravého horního rohu roven $\binom{m+n}{m}$. Každá taková cesta je totiž jednoznačně určena posloupností m nul a n jedniček, v níž nula či jednička na k -tém místě znamená, že v k -tém kroku cesty zahame doprava či nahoru.*

„Cestou“ budeme opět rozumět pouze cesty složené z hran směrem doprava a nahoru. Kdyby byla síť kompletní, vedlo by z A do B celkem $\binom{14}{7} = 3432$ cest. Z nich musíme vyloučit ty cesty, které vedou některým z bodů P, Q, R, S (obr. 3). Pro $X \in \{P, Q, R, S\}$ označme M_X množinu všech cest z A do B vedoucích zvoleným bodem X . Počet takových cest je zřejmě roven součinu počtu cest z A do X a počtu cest z X do B .



Obr. 3

Z uvedeného vzhledem ke zřejmé symetrii bodů P , S a bodů R , Q dostáváme

$$|M_P| = |M_S| = \binom{4}{2} \cdot \binom{10}{5} = 1\,512, \quad |M_R| = |M_Q| = \binom{7}{5} \cdot \binom{7}{2} = 441,$$

Některé cesty z A do B však procházejí vícero body P , Q , R , S . Abychom vypočítali počet prvků sjednocení množin M_P , M_Q , M_R , M_S , potřebujeme ještě určit počty prvků průniků dvojic a trojic z těchto množin (průnik všech čtyř množin je prázdný, protože žádná cesta nevede současně oběma body R i Q).

Z jednoduchého zobecnění úvahy o počtu cest vedoucích z A do B daným bodem X vyplývá, že počet cest, které vedou z Y_0 postupně body $Y_1, Y_2, \dots, Y_{k+1}$, je roven součinu počtů cest z Y_i do Y_{i+1} pro $i = 0, 1, \dots, k$. Pokud tedy označíme $M_{Y_1 Y_2 \dots Y_k}$ množinu všech cest vedoucích z A do B postupně body $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$, pro počty prvků množin dostaneme (opět využijeme symetrii)

$$\begin{aligned} |M_{PQ}| &= |M_{PR}| = |M_{RS}| = |M_{QS}| = \binom{4}{2} \cdot 1 \cdot \binom{7}{2} = 126, \\ |M_{PS}| &= \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2} = 720, \quad |M_{PQS}| = |M_{PRS}| = \binom{4}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \binom{4}{2} = 36. \end{aligned}$$

Ostatní průniky (se zastoupením obou množin M_Q a M_R) jsou prázdné.

Z principu inkluze a exkluze pak plyne

$$\begin{aligned} |M_P \cup M_Q \cup M_R \cup M_S| &= |M_P| + |M_Q| + |M_R| + |M_S| - \\ &- (|M_P \cap M_Q| + |M_P \cap M_R| + |M_P \cap M_S| + |M_Q \cap M_R| + |M_Q \cap M_S| + |M_R \cap M_S|) + \\ &+ (|M_P \cap M_Q \cap M_R| + |M_P \cap M_Q \cap M_S| + |M_P \cap M_R \cap M_S| + |M_Q \cap M_R \cap M_S|) - \\ &- |M_P \cap M_Q \cap M_R \cap M_S| = \\ &= 2 \cdot 1\,512 + 2 \cdot 441 - (4 \cdot 126 + 720 + 0) + (2 \cdot 36 + 2 \cdot 0) - 0 = 2\,754. \end{aligned}$$

Cest z A do B , které nevedou přes žádný z bodů P , Q , R , S , je $3\,432 - 2\,754 = 678$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Pokud žák má správný postup a jen se splete při numerických výpočtech, strhněte 1–2 body.

Pokud žák postupuje jako u prvního řešení, tabulku však nedokončí, udělte 3 body, pokud je z řešení zřejmé, že žák chápe princip vyplňování u „děř“; v opačném případě dejte nejvýše 2 body.

Pokud žák postupuje jako při třetím řešení, ale nesprávně použije princip inkluze a exkluze (např. zapomene na průniky trojic množin), dejte nejvýše 3 body.

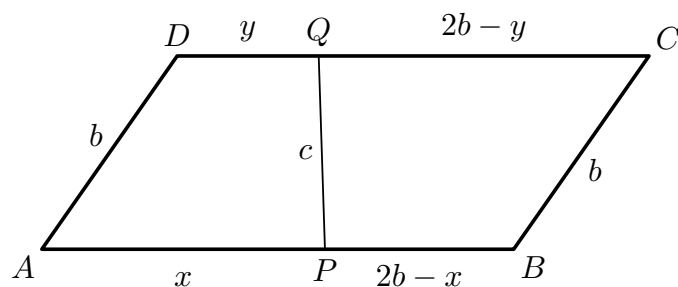
Za práci, v níž jsou uvedeny pouze dílčí výsledky např. z některého zde uvedeného řešení (bez náznaku dalšího postupu), dejte nejvýše 2 body.

2. Při řešení využijeme známé kritérium: *konvexní čtyřúhelník je tečnový, právě když součet délek jedné dvojice jeho protějších stran se rovná součtu délek druhé dvojice*.¹

Má-li přímka dělit rovnoběžník na dva čtyřúhelníky, musí procházet vnitřními body dvou jeho protějších stran. Rozebereme obě možnosti.

Uvažujme nejdříve dělicí přímku spojující body P , Q uvnitř stran AB , CD . Označme b délku strany BC a c , x a y postupně délky úsečků PQ , AP a DQ (obr. 4,

¹ Jedna implikace jednoduše plyne ze shodnosti úseků tečen z libovolného vrcholu tečnového čtyřúhelníku k vepsané kružnici.



Obr. 4

kde jsme při popisu délek využili toho, že $|AB| = 2b$ podle zadání). Předpokládejme, že přímka PQ vyhovuje podmínkám úlohy. Pro tečnové čtyřúhelníky $APQD$ a $BPQC$ pak platí

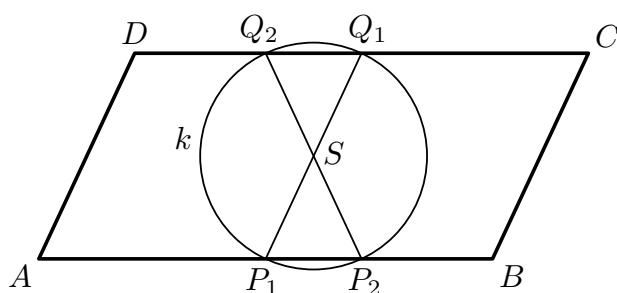
$$b + c = x + y,$$

$$b + c = (2b - x) + (2b - y) = 4b - (x + y).$$

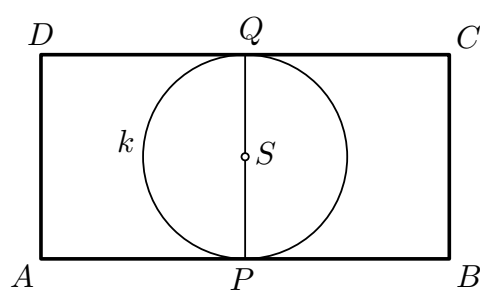
Sečtením obou rovnic dostaneme $2(b + c) = 4b$ neboli $c = b$. Dosazením do první rovnice vyjde $x + y = 2b$ neboli $x = 2b - y$. To znamená, že $|AP| = |CQ|$. V středové souměrnosti podle středu S rovnoběžníku se proto bod P zobrazí do bodu Q , tudíž přímka PQ prochází bodem S ; ten je zároveň středem úsečky PQ .

Z výše uvedeného vyplývá, že body P, Q leží na kružnici $k(S; \frac{1}{2}b)$. Její průsečíky se stranami AB a CD daného rovnoběžníku (souměrně sdružené podle středu S) určují polohu bodů P a Q , tedy hledanou přímku PQ . Přitom pro každou takto nalezenou přímku PQ procházející bodem S platí $|PQ| = b$ a $|AP| + |QD| = |AP| + |PB| = |AB| = 2b = |AD| + |PQ|$, takže jak čtyřúhelník $APQD$, tak i $CQPB$ s ním souměrně sdružený jsou opravdu tečnové. Všechna řešení úlohy jsou proto určena právě průsečíky kružnice k se stranami rovnoběžníku.

Podle trojúhelníkové nerovnosti pro trojúhelník ABD je $b + |BD| > 2b$. Odtud plyne $|BD| > b$ čili $|SB| > \frac{1}{2}b$, tudíž B je vnějším bodem kružnice k . Stejný závěr platí i pro ostatní vrcholy rovnoběžníku $ABCD$. Všechny společné body kružnice k s přímkami AB a CD tedy leží uvnitř stran rovnoběžníku.



Obr. 5

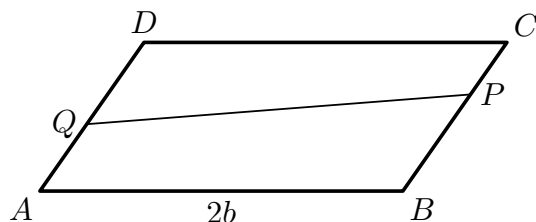


Obr. 6

V případě, že $ABCD$ je kosodélník (obr. 5), je jeho výška na stranu AB menší než b a vzdálenost středu S od přímek AB a CD je menší než $\frac{1}{2}b$, takže kružnice k má dva průsečíky s oběma delšími stranami a úloha má v tomto případě *dvě řešení* — jedno odpovídá rozdělení kosodélníku na dva shodné kosočtverce a druhé na dva shodné rovnoramenné lichoběžníky².

² Těm se dá kružnice i opsat, jsou tedy v dané situaci dokonce *dvojstředové*.

Pokud je $ABCD$ obdélník (obr. 6), jsou obě jeho delší strany tečnami kružnice k , která tak má s každou z nich společný právě jeden bod, tudíž existuje právě *jedno řešení*, jež odpovídá rozdělení daného obdélníku na dva shodné čtverce.



Obr. 7

Uvažujme nyní případ, kdy body P a Q jsou vnitřními body obou kratších protějších stran daného rovnoběžníku, např. nechť P je vnitřním bodem strany BC a Q je vnitřním bodem strany DA (obr. 7). Ve čtyřúhelníku $ABPQ$ pak již sama strana AB má větší délku než součet délek stran BP a QA , protože $|AB| = 2b$ a $|BP| + |QA| < |BC| + |DA| = 2b$. Kritérium z úvodu řešení tedy nemůže být splněno a další řešení v tomto případě nedostaneme.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za vyloučení případu, že přímka protíná kratší strany, 1 bod za uvedení rovností vyjadřujících podmínky, že čtyřúhelníky jsou tečnové, 1 bod za odvození rovnosti $c = b$, 1 bod za odvození rovnosti $|AP| = |CQ|$ a 2 body za dokončení řešení. Jeden bod strhněte, pokud si žák neuvědomí, že v případě obdélníku je jen jedno řešení. Za uhodnutí řešení (tj. pokud jsou pouze uvedena obě rozdělení na kosočtverce a rovnoramenné lichoběžníky, ale chybí postup dokazující, že jiná řešení neexistují) dejte 2 body — po jednom za každé řešení.

3. V celém řešení budeme pro zjednodušení pojmem *násobek* rozumět vždy celočíselný násobek.

Předpokládejme, že dvojice (p, q) celých čísel vyhovuje podmínkám úlohy. Pokud má uvažovaná kvadratická rovnice jeden z kořenů celočíselný, je i druhý kořen celočíselný, neboť podle Viětových vztahů kořeny x_1, x_2 a koeficient p uvažované kvadratické rovnice splňují podmínku $x_1 + x_2 = -p$. Pro oba celočíselné kořeny x_1, x_2 navíc platí $x_1 x_2 = q$.

Podle zadání je proto součet $x_1 + x_2$ násobkem součinu $x_1 x_2$, a tedy i násobkem každého z kořenů x_1, x_2 . Rozdíl dvou násobků daného čísla je opět násobkem tohoto čísla, proto i $(x_1 + x_2) - x_1 = x_2$ je násobkem čísla x_1 . Analogicky je x_1 násobkem čísla x_2 . Aby byly kořeny navzájem svými násobky, nutně musí platit buď $x_2 = -x_1$, nebo $x_2 = x_1$. Oba případy dále vyšetříme zvlášť.

- Pokud $x_2 = -x_1$, tak $p = -(x_1 + x_2) = 0$ a $q = -x_1^2 \leq 0$. Jelikož 0 je násobkem každého celého čísla, hodnota x_1 může být libovolným celým číslem a dané úloze vyhovuje každá dvojice $(p, q) = (0, -n^2)$, kde n je libovolné celé číslo (pro vygenerování všech *různých* řešení samozřejmě stačí uvažovat jen nezáporné hodnoty n).
- Pokud $x_2 = x_1 = x$, tak $p = -2x$ a $q = x^2$. Aby bylo $2x$ násobkem x^2 , musí být buď $x = 0$, nebo 2 násobkem čísla x . První případ přísluší řešení $(p, q) = (0, 0)$, které už jsme obdrželi i v předchozím případě pro $n = 0$. V druhém případě x leží v množině $\{-2, -1, 1, 2\}$, čemuž postupně odpovídají dvojice $(p, q) \in \{(-4, 4), (-2, 1), (2, 1), (4, 4)\}$. Všechny čtyři zřejmě splňují podmínky zadání.

Odpověď. Úloze vyhovují dvojice $(-4, 4), (-2, 1), (2, 1), (4, 4)$, jakož i všechny dvojice $(0, -n^2)$, kde n je libovolné nezáporné celé číslo, a žádné jiné.

Jiné řešení. Předpokládejme, že dvojice (p, q) vyhovuje zadání, a označme x_1 celočíselný kořen dané rovnice a k takové celé číslo, že $p = k \cdot q$. Pak platí

$$x_1^2 + kx_1q + q = 0 \quad \text{neboli} \quad x_1^2 = -q(kx_1 + 1).$$

V případě, že $x_1 = 0$, dostáváme $q = 0$, a tedy i $p = 0$.

Pokud $x_1 \neq 0$, je x_1^2 nenulovým násobkem čísla $kx_1 + 1$. Protože čísla $kx_1 + 1$ a x_1 , a tedy i čísla $kx_1 + 1$ a x_1^2 jsou nesoudělná,³ je to možné jen v případě, že $kx_1 + 1 \in \{1, -1\}$.

- Pokud $kx_1 + 1 = 1$, je $kx_1 = 0$ a z nenulovosti x_1 plyne $k = 0$. Proto $q = -x_1^2$, $p = 0$ a podobně jako v prvním řešení dostáváme vyhovující dvojice $(p, q) = (0, -n^2)$, kde n je libovolné celé číslo (hodnota $n = 0$ zahrnuje i případ $x_1 = 0$, který jsme již prověřili samostatně).
- Pokud $kx_1 + 1 = -1$, je $kx_1 = -2$, tedy dvojice (k, x_1) je některou z dvojic $(1, -2)$, $(2, -1)$, $(-2, 1)$, $(-1, 2)$, snadno již dopočítáme $p = kx_1^2 = -2x_1$ a $q = x_1^2$, a dostaneme tak zbylá řešení jako při prvním postupu.

Poznámka. Rozbor rovnice

$$x_1^2 + kx_1q + q = 0 \tag{1}$$

z předchozího řešení lze provést i bez úvahy o nesoudělnosti. Skutečně, z (1) plyne $q \mid x_1^2$ a $x_1 \mid q$, odkud $x_1^2 \mid x_1q$, a proto z (1) dokonce plyne $x_1^2 \mid q$, což spolu s $q \mid x_1^2$ vede k závěru, že $q = \pm x_1^2$. Po dosazení $q = x_1^2$ přejde (1) do tvaru $x_1^2(2 + kx_1) = 0$, po dosazení $q = -x_1^2$ do tvaru $kx_1^3 = 0$. Závěr řešení je pak stejný jako při původním postupu.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Při prvním postupu dejte 2 body za uvedení Viětových vztahů spolu s argumentem o celočíselnosti x_2 , 2 body za odvození $x_2 = \pm x_1$ a po jednom bodu za dokončení každé větve. Při druhém postupu dejte 2 body za odvození rovnosti $x_1^2 = -q(kx_1 + 1)$, 2 body za vysvětlení, proč $kx_1 + 1 \in \{1, -1\}$, a po jednom bodu za dokončení každého případu. Pokud žák (při jakémkoli postupu) neuvažuje některou z dvojice větví a ve výsledku mu tak některé řešení chybí, udělte celkem nejvýše 4 body. Pokud žák úkol nevyřeší, ale uhodne *všechna* řešení, dejte 2 body; při uhodnutí jedné (kompletní) větve řešení dejte 1 bod.

³ Čísla $kx_1 + 1$ a x_1 mohou být i záporná, nesoudělnost je i tehdy dobře definovaná.