

64. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie B

1. Předpokládejme, že přirozené číslo a má 15 kladných dělitelů. Kolik jich může mít přirozené číslo b , když nejmenší společný násobek čísel a a b má 20 kladných dělitelů?
2. Označme P průsečík úhlopříček konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Vypočtěte jeho obsah, jestliže obsahy trojúhelníků ABC , BCD a DAP jsou po řadě 8 cm^2 , 9 cm^2 , 10 cm^2 .
3. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a , b , c platí

$$\frac{ab}{a^2 - ab + b^2} + \frac{bc}{b^2 - bc + c^2} + \frac{ca}{c^2 - ca + a^2} \leq 3.$$

Určete, kdy nastane rovnost.

Klauzurní část školního kola kategorie B se koná

ve čtvrtek 22. ledna 2015

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

64. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie B

1. V domácím kole jsme ukázali, že přirozené číslo, jehož rozklad na součin prvočísel je $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, kde $p_1, p_2, \dots, p_k$ jsou navzájem různá prvočísla a $a_1, a_2, \dots, a_k$ přirozená čísla, má právě $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$ kladných dělitelů.

Existuje jediný rozklad čísla 15 na součin několika přirozených čísel větších než 1, a to $15 = 3 \cdot 5$. Jelikož číslo a má 15 dělitelů, je jeho rozklad na součin prvočísel tvaru

$$p_1^{14} \quad \text{nebo} \quad p_2^2 p_3^4,$$

kde $p_1, p_2 \neq p_3$ jsou prvočísla. Všechny rozklady čísla 20 na součin několika přirozených čísel větších než 1 jsou $20 = 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5$. Jelikož nejmenší společný násobek n obou čísel a a b má 20 dělitelů, je jeho rozklad na prvočinitele tvaru

$$q_1^{19}, \quad q_2 q_3^9, \quad q_4^3 q_5^4 \quad \text{nebo} \quad q_6 q_7 q_8^4,$$

kde $q_1, q_2 \neq q_3, q_4 \neq q_5, q_6 \neq q_7 \neq q_8 \neq q_6$ jsou prvočísla.

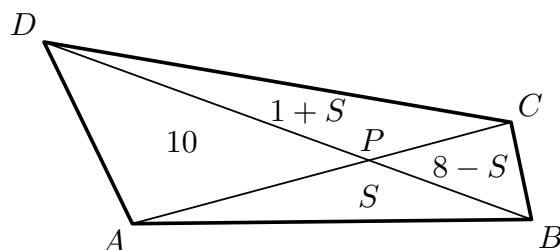
Číslo a je však zároveň dělitelem čísla n . To nastane pouze v následujících případech:

- a) $p_1 = q_1$, tedy $a = p_1^{14}$ a $n = p_1^{19}$. Vyhovuje pouze $b = p_1^{19}$, a číslo b má tedy právě 20 kladných dělitelů.
- b) $p_2 = q_4$ a $p_3 = q_5$, tedy $a = p_2^2 p_3^4$ a $n = p_2^3 p_3^4$, tudíž $b = p_2^3 p_3^\alpha$, kde $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Číslo b má v tomto případě $4(1 + \alpha)$ dělitelů, což jsou všechna čísla z množiny $\{4, 8, 12, 16, 20\}$.

Závěr. Číslo b může mít 4, 8, 12, 16 nebo 20 dělitelů.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Z toho za výpis všech možností prvočíselného rozkladu čísel a a n udělte po 1 bodu, za nalezení všech možností, kdy $a \mid n$ udělte 1 bod, za nalezení všech možných tvarů čísla b udělte v případech a) a b) po 1 bodu a konečně 1 bod udělte za určení všech možných počtů dělitelů čísla b . Řešení, ve kterém je jeden z případů a) nebo b) opomenut, oceňte nejvýše 2 body.

2. Označme S_{XYZ} obsah trojúhelníku XYZ vyjádřený v cm^2 a dále označme $S = S_{ABP}$. Podle zadání platí $S_{ADP} = 10$, $S + S_{BCP} = 8$, $S_{BCP} + S_{CDP} = 9$. Z druhé rovnosti plyne $S_{BCP} = 8 - S$, dosazením do třetí rovnosti pak vyjde $S_{CDP} = 1 + S$ (obr. 1).



Obr. 1

Trojúhelníky ABP a ADP mají shodnou výšku z vrcholu A . Pro poměr jejich obsahů proto platí $S : S_{ADP} = |BP| : |DP|$. Podobně pro trojúhelníky BCP a CDP dostaneme $S_{BCP} : S_{CDP} = |BP| : |DP|$. Odtud již plyne $S : S_{ADP} = S_{BCP} : S_{CDP}$, což vzhledem k odvozeným vztahům znamená

$$\frac{S}{10} = \frac{8 - S}{1 + S}.$$

Po úpravě pak dostaneme pro S kvadratickou rovnici

$$S^2 + 11S - 80 = (S + 16)(S - 5) = 0,$$

jež má dva kořeny -16 a 5 . Protože obsah S trojúhelníku ABP je nezáporné číslo, vyhovuje pouze $S = 5$. Odtud již snadno dopočteme z výše uvedených vztahů $S_{BCP} = 3$ a $S_{CDP} = 6$. Obsah celého čtyřúhelníku $ABCD$ vyjádřený v cm^2 tak je

$$S + S_{BCP} + S_{CDP} + S_{ADP} = 5 + 3 + 6 + 10 = 24.$$

Závěr. Obsah čtyřúhelníku $ABCD$ je 24 cm^2 .

Jiné řešení. Délky úseček PA , PB , PC , PD (vyjádřené v cm) označíme po řadě a , b , c , d . Podle známého vzorce $S = \frac{1}{2}uv \sin \omega$ pro obsah trojúhelníku, jehož strany délek u a v svírají úhel velikosti ω , vyjádříme podmínky úlohy rovnostmi

$$8 = \frac{1}{2}ab \sin \varphi + \frac{1}{2}bc \sin(\pi - \varphi), \quad 9 = \frac{1}{2}bc \sin(\pi - \varphi) + \frac{1}{2}cd \sin \varphi, \quad 10 = \frac{1}{2}da \sin(\pi - \varphi),$$

kde $\varphi = |\sphericalangle APB|$. Kvůli jednodušším zápisům položíme $k = \frac{1}{2} \sin \varphi = \frac{1}{2} \sin(\pi - \varphi)$. Dostaneme tak soustavu rovnic

$$8 = kab + kbc, \quad 9 = kbc + kcd, \quad 10 = kda, \quad (1)$$

z níž budeme hledat obsah S čtyřúhelníku $ABCD$, který bude v cm^2 vyjádřen vzorcem

$$S = kab + kbc + kcd + kda. \quad (2)$$

Nejprve vhodnou kombinací druhé a třetí rovnice (1) vyloučíme d :

$$9a - 10c = kabc. \quad (3)$$

Kombinací této rovnice s první rovnicí (1), jejíž pravou stranu upravíme na součin $kb(a + c)$, vyloučíme b :

$$(9a - 10c)(a + c) - 8ac = 0.$$

Díky identitě

$$(9a - 10c)(a + c) - 8ac = 9a^2 - 9ac - 10c^2 = (3a - 5c)(3a + 2c)$$

tak vidíme, že pro (kladná) čísla a , c platí $3a = 5c$ neboli $9a = 15c$, a proto rovnost (3) lze přepsat jako $5c = kabc$, odkud $kab = 5$. Z rovností (1) pak plyne $kbc = 3$ a $kcd = 6$, což vše po dosazení do (2) spolu s hodnotou $kda = 10$ vede k výsledku $S = 24$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za vyjádření obsahu pomocí jednoho ze tří trojúhelníků ABP , BCP či CDP , 2 body za zdůvodnění úměry mezi obsahy čtyř trojúhelníků, 1 bod za sestavení odpovídající rovnice a 1 bod za její vyřešení. Pokud řešitel správně vypočte obsah pouze pro speciálně zvolený vyhovující čtyřúhelník $ABCD$ (například s navzájem kolmými úhlopříčkami), udělte nejvýše 2 body.

3. Nejprve dokážeme pro libovolná $a, b > 0$ jednodušší nerovnost

$$\frac{ab}{a^2 - ab + b^2} \leq 1. \quad (1)$$

Jmenovatel zlomku na levé straně je zřejmě kladný, neboť

$$a^2 - ab + b^2 = (a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}b^2 > 0.$$

Pokud jím tedy vynásobíme obě strany této nerovnosti, dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$ab \leq a^2 - ab + b^2,$$

která je ekvivalentní se zřejmou nerovností $0 \leq (a - b)^2$. Proto platí i nerovnost (1) a rovnost v ní nastane, právě když $a = b$.

Záměnnou proměnných (a, b) v nerovnosti (1) proměnnými (b, c) , (c, a) dostaneme postupně nerovnosti

$$\frac{bc}{b^2 - bc + c^2} \leq 1, \quad (2)$$

$$\frac{ca}{c^2 - ca + a^2} \leq 1, \quad (3)$$

v nichž nastane rovnost, právě když po řadě platí $b = c$ a $c = a$.

Sečtením nerovností (1), (2) a (3) pak dostaneme dokazovanou nerovnost

$$\frac{ab}{a^2 - ab + b^2} + \frac{bc}{b^2 - bc + c^2} + \frac{ca}{c^2 - ca + a^2} \leq 3.$$

Rovnost v ní nastane, právě když nastane rovnost ve všech třech užitých nerovnostech, tj. právě když $a = b = c$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za konstatování, že stačí dokázat nerovnost (1), udělte 2 body, za její úplný důkaz či odkaz na šestou úlohu domácího kola udělte další dva body. Pokud student opomene zmínit, že jmenovatel zlomku na levé straně je kladný, strhněte 1 bod.