56. mezinárodní matematická olympiáda

Hlavními pořadateli 56. mezinárodní matematické olympiády, která se konala od 4. do 16. července v thajském městě Chiang Mai na severu této pro nás pořád ještě exotické země, byly Ústav pro podporu výuky věd a technologií (IPST), Chiangmajská univerzita, Matematické sdružení Thajska pod patronací Jeho Veličenstva krále a Nadace pro podporu akademických olympiád a rozvoje vědecké výchovy (POSN) pod patronací Její Výsosti princezny Galyani Vadhana Krom Luang Naradhiwas Rajanagarindra.

Organizátoři připravili pro práci mezinárodní jury, jejímž hlavním úkolem je vybrat z připravených návrhů šestici soutěžních úloh, vynikající podmínky v pětadvacetipatrovém hotelu Holiday Inn v samém centru města. Soutěžící spolu s pedagogickými vedoucími bydleli v neméně skvělém hotelu v jiné části města. Počet soutěžících byl opět rekordní: olympiády se zúčastnilo 577 studentů ze 104 zemí celého světa.

Slavnostní zahájení se konalo v aule chiangmajské univerzity a zakončilo ho nápadité defilé s národními vlajkami.

České družstvo, které bylo vybráno na základě výsledků ústředního kola 64. ročníku MO v Praze a následné týdenní přípravy v Kostelci nad Černými lesy, tvořili *Vojtěch Dvořák* z 8. ročníku Gymnázia Jiřího Gutha-Jarkovského v Praze, *Matěj Konečný* z 8. ročníku Gymnázia v Českých Budějovicích v Jírovcově ulici, *Marian Poljak* z 7. ročníku Gymnázia Jakuba Škody v Přerově, *Jan Soukup* z 8. ročníku Gymnázia Jaroslava Vrchlického v Klatovech, *Radovan Švarc* z 8. ročníku Gymnázia Česká Třebová a *Pavel Turek* z 6. ročníku Gymnázia v Olomouci-Hejčíně. Vedoucím družstva byl RNDr. *Karel Horák*, CSc., z Matematického ústavu Akademie věd v Praze a studenty doprovázel Mgr. *Michal Rolínek* z Institutu pro vědu a technologii v Klosterneuburgu u Vídně.

Vlastní soutěž se odehrála v univerzitní aule hotelu 10. a 11. července, kdy soutěžící jako obvykle řešili vždy po trojici soutěžních úloh. Na to měli pokaždé vyhrazeno přesně 4,5 hodiny; za každou ze šesti úloh mohli získat nejvýše 7 bodů.

Výsledky našich jsou shrnuty v následující tabulce:

Umístění		**Body za úlohu** 1	2	3	4	5	6	**Body**	**Cena**
394.–419.	Vojtěch Dvořák	7	1	0	0	0	0	8	HM
322.–336.	Matěj Konečný	7	1	0	2	1	0	11	HM
257.–282.	Marian Poljak	6	0	0	7	1	0	14	III.
365.–393.	Jan Soukup	7	0	0	1	1	0	9	HM
217.–256.	Radovan Švarc	4	1	0	7	3	0	15	III.
160.–182.	Pavel Turek	7	2	0	7	1	0	17	III.
	Celkem	38	5	0	24	7	0	74	

Vzhledem k tomu, že dva z našich studentů už mají doma po medaili z předchozí 55. MMO, čekali jsme, že své zkušenosti i přípravu zúročí lépe. Letošní MMO však dle mínění mnohých patřila k jedné z nejtěžších. Nicméně zisk tří bronzových medailí za velký úspěch považovat nelze. Zbylí tři naši studenti se museli spokojit pouze se základním oceněním, kterým je tzv. *Honourable mention* a které se uděluje studentům bez medaile za úplné vyřešení alespoň jedné soutěžní úlohy.

Pro srovnání uveďme i výsledky slovenských reprezentantů, kteří si tentokrát vedli o dost lépe než naši (a to nejlepšímu „česko-slovenskému“ účastníku Buiovi unikla zlatá medaile jen o bod):

Umístění		**Body za úlohu** 1	2	3	4	5	6	**Body**	**Cena**
257.–282.	Patrik Bak	1	5	0	7	1	0	14	III.
101.–117.	Eduard Batmendijn	7	1	0	7	1	4	20	II.
40.–54.	Truc Lam Bui	7	5	0	7	0	6	25	II.
420.–430.	Tomáš Kekeňák	4	1	0	1	1	0	7	
183.–216.	Zhen Ning Dávid Liu	7	1	0	7	1	0	16	III.
217.–256.	Samuel Sládek	7	0	0	7	1	0	15	III.
	Celkem	33	13	0	36	5	10	97	

V neoficiálním pořadí všech zúčastněných zemí jsme stěží uhájili pozici v první polovině (spolu s Mongolskem a Švýcarskem jsme se podělili o 45.–47. příčku) více než stočlenného pole. Počet získaných cen a celkový bodový zisk jednotlivých zemí vyčtete z připojené tabulky (čísla v závorce označují nižší počet reprezentantů):

	I	II	III	body
USA	5	1	0	185
ČLR	4	2	0	181
Korea	3	1	2	161
KLDR	3	3	0	156
Vietnam	2	3	1	151
Austrálie	2	4	0	148
Írán	3	2	1	145
Rusko	0	6	0	141
Kanada	2	0	4	140
Singapur	1	4	1	139
Ukrajina	2	3	1	135
Thajsko	2	3	1	134
Rumunsko	1	4	1	132
Francie	0	3	3	120
Chorvatsko	1	3	1	119
Peru	2	2	1	118
Polsko	1	1	4	117
Tchaj-wan	0	4	1	115
Mexiko	1	2	3	114
Maďarsko	0	3	3	113
Turecko	0	5	0	113
Brazílie	0	3	3	109
Japonsko	0	3	3	109
Velká Británie	0	4	1	109
Kazachstán	1	1	2	105
Arménie	0	1	5	104
Německo	0	2	3	102
Hongkong	0	2	3	101
Bulharsko	0	2	1	100
Indonésie	0	2	4	100
Itálie	1	2	0	100
Srbsko	1	1	2	100
Bangladéš	0	1	4	97
Slovensko	0	2	3	97
Makao	0	1	2	88
Filipíny	0	2	2	87
Indie	0	1	2	86
Moldavsko	0	1	2	85
Bělorusko	0	0	3	84
Izrael	1	0	2	83
Saudská Arábie	0	1	3	81
Gruzie	0	1	3	80
Bosna a Hercegovina	0	0	2	76
Nizozemsko	0	0	3	76
Česká republika	0	0	3	74
Mongolsko	0	0	2	74
Švýcarsko	0	0	3	74
Ázerbájdžán	0	0	2	73
Kolumbie	0	0	4	72
Nový Zéland	0	0	2	72
Řecko	0	1	2	71
Argentina	0	0	1	70

	I	II	III	body
Portugalsko	0	0	3	70
Sýrie	0	1	1	69
JAR	0	0	1	68
Belgie	0	1	0	67
Malajsie	0	0	3	66
Turkmenistán	0	0	2	64
Uzbekistán	0	0	3	64
Rakousko	0	0	3	63
Švédsko	0	0	2	63
Alžírsko	0	1	1	60
Kypr	0	1	0	58
Tádžikistán (5)	0	1	1	57
Litva	0	0	1	54
Norsko	0	1	0	54
Kostarika	0	0	2	53
Paraguay	0	0	3	53
Dánsko	0	0	2	52
Estonsko	0	0	1	51
Srí Lanka	0	0	0	51
Španělsko	0	0	1	47
Slovinsko	0	0	1	46
Makedonie	0	0	1	45
Island	0	0	0	41
Tunisko (4)	0	0	1	41
Albánie	0	0	0	37
Irsko	0	0	0	37
Lotyšsko	0	0	0	36
Ekvádor	0	0	0	27
Maroko	0	0	0	27
Finsko	0	0	0	26
Nikaragua (3)	0	0	0	26
Trinidad a Tobago (4)	0	1	0	26
Pákistán	0	0	1	25
Kambodža	0	0	0	24
Kosovo	0	0	0	24
Nigérie	0	0	0	22
Černá Hora (3)	0	0	1	19
Lichtenštejnsko (1)	0	0	1	18
Portoriko (3)	0	0	1	18
Kyrgyzstán	0	0	0	17
Uruguay	0	0	0	16
Kuba (1)	0	0	1	15
Salvádor (4)	0	0	0	14
Venezuela (2)	0	0	0	13
Chile (2)	0	0	0	12
Lucembursko (2)	0	0	0	12
Panama (3)	0	0	0	9
Uganda (5)	0	0	0	6
Bolívie (5)	0	0	0	5
Ghana (5)	0	0	0	5
Botswana	0	0	0	1
Tanzánie (3)	0	0	0	0

O obtížnosti úloh přirozeně svědčí množství rozdaných bodů. Jak je patrno z tabulky, Čínu letos o pár bodů předběhly Spojené státy americké, ale ani ty nepřekonaly hranici 200 bodů, což se už dlouho nestalo. Rusko letos vypadlo ze silné pětky, protože ruští studenti si překvapivě neporadili s obtížnou třetí planimetrickou úlohou, a tak nezískali ani jednu zlatou a skončili se šesti stříbrnými až na osmé příčce. Úlohy rozhodně nebyly lehké, naši si sice výborně poradili s kombinatorickou první úlohou, na které překvapivě pohořeli jinak výborní Vietnamci, a o něco hůře se čtvrtou (geometrickou) úlohou. Na zbývající těžší úlohy však bohužel nestačili.

K zisku zlaté medaile letos stačilo pouhých 26 bodů, přičemž plného počtu 42 bodů dosáhl jediný soutěžící, Zhuo Qun (Alex) Song z Kanady. Stříbrné medaile se udělovaly za 19–25 bodů a na bronz stačilo 14 bodů. Celkem jury udělila 39 zlatých, 100 stříbrných a 143 bronzových medailí a 126 studentů získalo „pochvalné uznání“ (Honourable mention).

Vynikající organizace se projevila i v bohaté náplni volného času jak studentů, tak jejich vedoucích. K největším zážitkům bezesporu patřil výlet do sloního parku Maetaman korunovaný jízdou na hřbetě slona, který po soutěži absolvovali i soutěžící, neméně vzrušující byla i zhruba čtyřkilometrová plavba na bambusových vorech mírnými peřejemi. Po koordinaci jsme pak měli ještě možnost navštívit chrám Wat Pra That Doi Suthep v horách za hranicí města a poté chrám Wat Chedi Luang v historickém středu města.

Slavnostní zakončení olympiády se konalo opět v prostorné aule chiangmajské univerzity za účasti thajského ministra školství a v uvolněném duchu bez velkých proslovů. Po úžasném bubenickém a tanečním vystoupení došlo k rozdání medailí, na němž se valnou částí kromě představitelů univerzity a pana ministra podíleli sami organizátoři a koordinátoři.

O hostitelských zemích příštích olympiád je už jasno až do roku 2019: v roce 2016 to bude Hongkong, poté Brazílie, Rumunsko a Velká Británie.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Konečnou množinu $\mathcal{S}$ bodů v rovině nazveme *vyváženou*, jestliže pro libovolné dva různé body A a B z $\mathcal{S}$ existuje v $\mathcal{S}$ takový bod C, že $|AC| = |BC|$. Množinu $\mathcal{S}$ nazveme *středuprostou*, jestliže pro žádné tři různé body A, B a C z $\mathcal{S}$ neexistuje v $\mathcal{S}$ bod P takový, že $|PA| = |PB| = |PC|$.

(a) Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geqq 3$ existuje vyvážená množina obsahující právě n bodů.
(b) Určete všechna přirozená čísla $n \geqq 3$, pro něž existuje vyvážená středuprostá množina obsahující právě n bodů. (*Nizozemsko*)

2. Určete všechny trojice (a, b, c) kladných celých čísel, pro něž každé z čísel

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

je mocninou 2.

(*Mocnina* 2 *je celé číslo tvaru* 2^n, *kde* n *je nezáporné celé číslo.*)

(*Srbsko*)

3. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník splňující $|AB| > |AC|$. Označme Γ kružnici mu opsanou, H jeho průsečík výšek a F patu výšky z vrcholu A. Střed strany BC označme M. Nechť Q je bod kružnice Γ takový, že $|\sphericalangle HQA| = 90°$, a K bod kružnice Γ takový, že $|\sphericalangle HKQ| = 90°$. Předpokládejme, že body A, B, C, K a Q jsou navzájem různé a leží na kružnici Γ v tomto pořadí.

Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům KQH a FKM se vzájemně dotýkají. (*Ukrajina*)

4. Trojúhelníku ABC je opsána kružnice Ω o středu O. Přitom kružnice Γ se středem A protne úsečku BC v bodech D a E takových, že body B, D, E a C jsou různé a leží na přímce BC v tomto pořadí. Kružnice Γ a Ω se protínají v bodech F a G, přičemž body A, F, B, C a G leží na kružnici Ω v tomto pořadí. Označme K další průsečík kružnice opsané trojúhelníku BDF s úsečkou AB a L další průsečík kružnice opsané trojúhelníku CGE s úsečkou CA.

Předpokládejme dále, že přímky FK a GL jsou různé a protínají se v bodě X. Dokažte, že bod X leží na přímce AO. (*Řecko*)

5. Nechť $\mathbb{R}$ označuje množinu všech reálných čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jež splňují rovnici

$$f\big(x + f(x + y)\big) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

pro všechna reálná čísla x a y. (*Chorvatsko*)

6. Posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ celých čísel vyhovuje následujícím podmínkám:
(i) $1 \leqq a_j \leqq 2\,015$ pro každé $j \geqq 1$;
(ii) $k + a_k \neq l + a_l$ pro všechna k a l taková, že $1 \leqq k < l$.

Dokažte, že existují dvě kladná celá čísla b a N taková, že

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b)\right| \leqq 1\,007^2$$

pro všechna celá čísla m a n splňující $n > m \geqq N$. (*USA*)