Úloha I–1

Najděte všechny surjektivní funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro všechna kladná celá čísla a a b platí právě jedna z následujících rovností:

$$f(a) = f(b),$$
$$f(a+b) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

Poznámky: $\mathbb{N}$ označuje množinu všech kladných celých čísel. Funkci $f\colon X \to Y$ nazýváme surjektivní, jestliže pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$.

Úloha I–2

Nechť $n \geqslant 3$ je celé číslo. *Vnitřní úhlopříčka jednoduchého n-úhelníku* je úhlopříčka, která celá leží v tomto n-úhelníku. Označme $D(P)$ počet všech vnitřních úhlopříček jednoduchého n-úhelníku P a označme $D(n)$ nejmenší možnou hodnotu $D(Q)$, kde Q je libovolný jednoduchý n-úhelník. Dokažte, že žádné dvě vnitřní úhlopříčky jednoduchého n-úhelníku P se neprotínají (případně se protínají pouze ve společném krajním bodě), právě tehdy když $D(P) = D(n)$.

Poznámka: Jednoduchý n-úhelník je mnohoúhelník s n vrcholy, který sám sebe neprotíná. Mnohoúhelník není nutně konvexní.

Úloha I–3

Nechť čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový. Nechť bod E je průsečíkem přímek rovnoběžných s AC a BD procházejících po řadě body B a A. Přímky EC a ED se protínají s kružnicí opsanou trojúhelníku AEB dále po řadě v bodech F a G. Dokažte, že body C, D, F a G leží na jedné kružnici.

Úloha I–4

Najděte všechny dvojice kladných celých čísel $[m, n]$, pro která existují vzájemně nesoudělná celá čísla a a b větší než 1 taková, že

$$\frac{a^m + b^m}{a^n + b^n}$$

je celé číslo.

Čas: 5 hodin
Čas na dotazy: 60 min
Za každou úlohu lze získat 8 bodů.
Úlohy nejsou řazeny podle obtížnosti.

Úloha T–1

Dokažte, že pro všechna kladná reálná čísla a, b, c taková, že $abc = 1$, platí následující nerovnost:

$$\frac{a}{2b+c^2} + \frac{b}{2c+a^2} + \frac{c}{2a+b^2} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Úloha T–2

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ takové, že

$$f(x^2yf(x)) + f(1) = x^2f(x) + f(y)$$

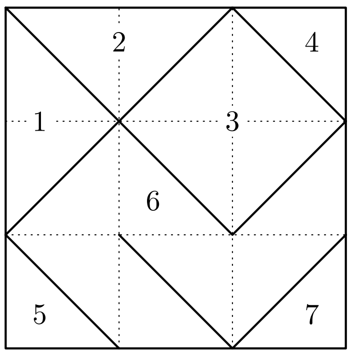
platí pro všechna nenulová reálná čísla x a y.

Úloha T–3

V řadě stojí n studentů na pozicích od 1 do n. Zatímco se učitel dívá jinam, někteří studenti změní své pozice. Když se učitel podívá zpět, studenti opět stojí v řadě. Jestliže student, který byl původně na pozici i, je teď na pozici j, řekneme, že se tento student přemístil o $|i-j|$ kroků. Určete největší možný součet kroků, kterého mohou všichni studenti dosáhnout.

Úloha T–4

Nechť N je kladné celé číslo. V každém z N^2 jednotkových čtverců tabulky $N \times N$ je zakreslena jedna z jeho dvou úhlopříček. Zakreslené úhlopříčky rozdělují tabulku $N \times N$ na K oblastí. Pro každé N určete nejmenší a největší možnou hodnotu K.



Příklad pro $N = 3$, $K = 7$

Čas: 5 hodin
Čas na dotazy: 60 min
Za každou úlohu lze získat 8 bodů.
Úlohy nejsou řazeny podle obtížnosti.

Úloha T–5

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, kde $|AB| > |AC|$. Dokažte, že existuje bod D s následující vlastností: jestliže dva různé body X a Y leží ve vnitřní oblasti trojúhelníku ABC tak, že body B, C, X a Y leží na jedné kružnici a platí

$$|\angle AXB| - |\angle ACB| = |\angle CYA| - |\angle CBA|,$$

pak přímka XY prochází bodem D.

Úloha T–6

Nechť I je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, kde $|AB| > |AC|$, a nechť přímka AI protíná stranu BC v bodě D. Předpokládejme, že bod P leží na úsečce BC a platí $|PI| = |PD|$. Dále nechť bod J je obrazem bodu I v osové souměrnosti určené osou úsečky BC a nechť Q je další průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a APD. Dokažte, že $|\angle BAQ| = |\angle CAJ|$.

Úloha T–7

Najděte všechny uspořádané dvojice kladných celých čísel $[a, b]$ tak, že

$$a! + b! = a^b + b^a.$$

Úloha T–8

Nechť $n \geqslant 2$ je celé číslo. Určete počet kladných celých čísel m takových, že $m \leqslant n$ a $m^2 + 1$ je dělitelné číslem n.